ディジタル信号処理

中原 仁 (非常勤講師)

教科書：信号処理入門(オーム社)

本授業の内容とねらい

コンピュータ処理に適した
ディジタル信号処理の基礎知識を身につける
信号処理に必要な数学的知識を身につける

主な授業項目

- アナログとディジタル
- 二進数とビット・バイト
- 信号処理の意義と実例(平滑化)
- 相互相関関数と自己相関関数
- フーリエ級数展開
- 離散フーリエ変換(DFT)
- 高速フーリエ変換(FFT)
- 離散コサイン変換(DCT)とデータ圧縮

評価について

本授業の評価は、
課題提出(プリント演習問題)、中間試験、期末試験で行います

第1章 信号処理とは

教科書 pp1–18

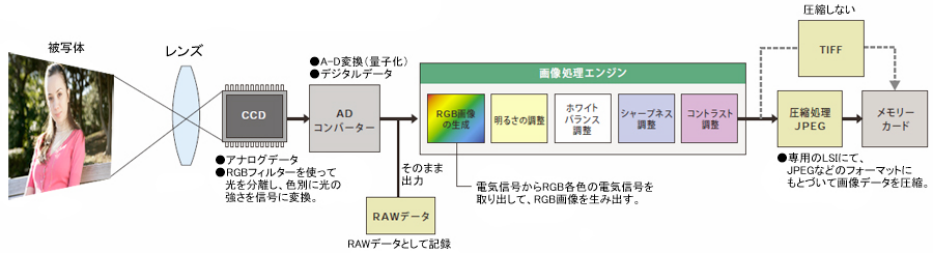
- 身の回りの信号処理
- サンプリングと量子化
- 信号の分類と各種の波形

身の回りの信号処理

タブレット・スマートフォン

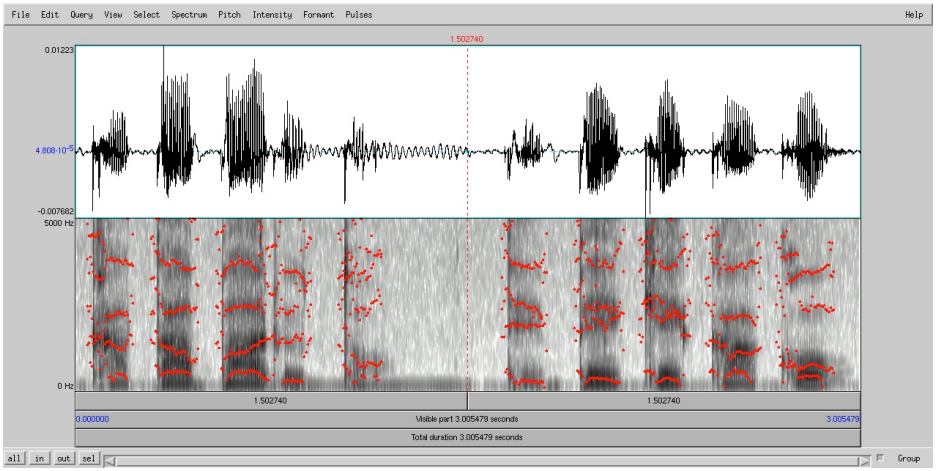
http://www.sony.jp

デジタルカメラ



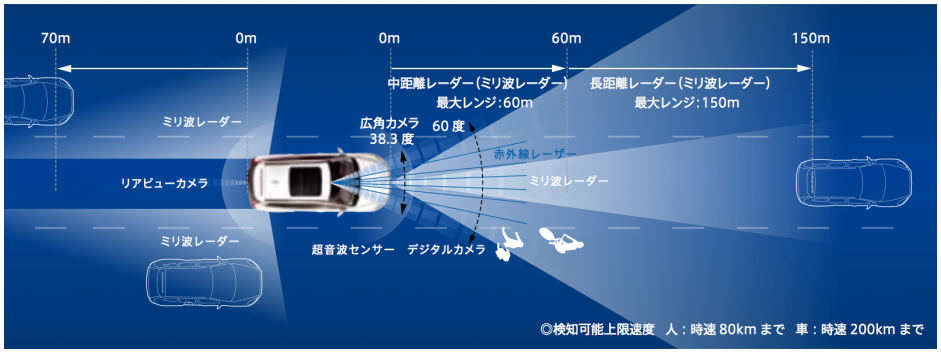
http://av.jpn.support.panasonic.com/

音声認識



http://www.f.waseda.jp/kitahara/

自動ブレーキ



http://www.volvocars.com/jp

身の回りの信号処理

タブレット・スマートフォン

タッチパネル

電気信号(静電容量)

↓

ノイズ除去

↓

二値化

↓

指位置の検出

↓

解析・対応

デジタルカメラ

http://av.jpn.support.panasonic.com/

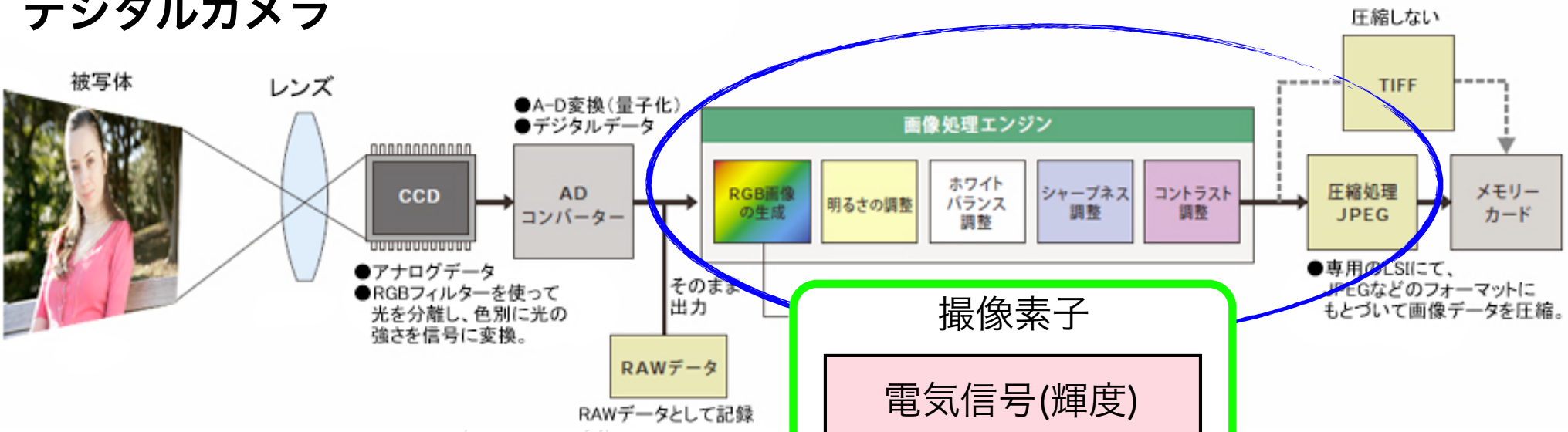
http://www.volvocars.com/jp

http://www.f.waseda.jp/kitahara/

http://www.sony.jp

身の回りの信号処理

デジタルカメラ



撮像素子

電気信号(輝度)

ノイズ除去

画像調整・圧縮

保存

音声認識

http://www.f.waseda.jp/kitahara/

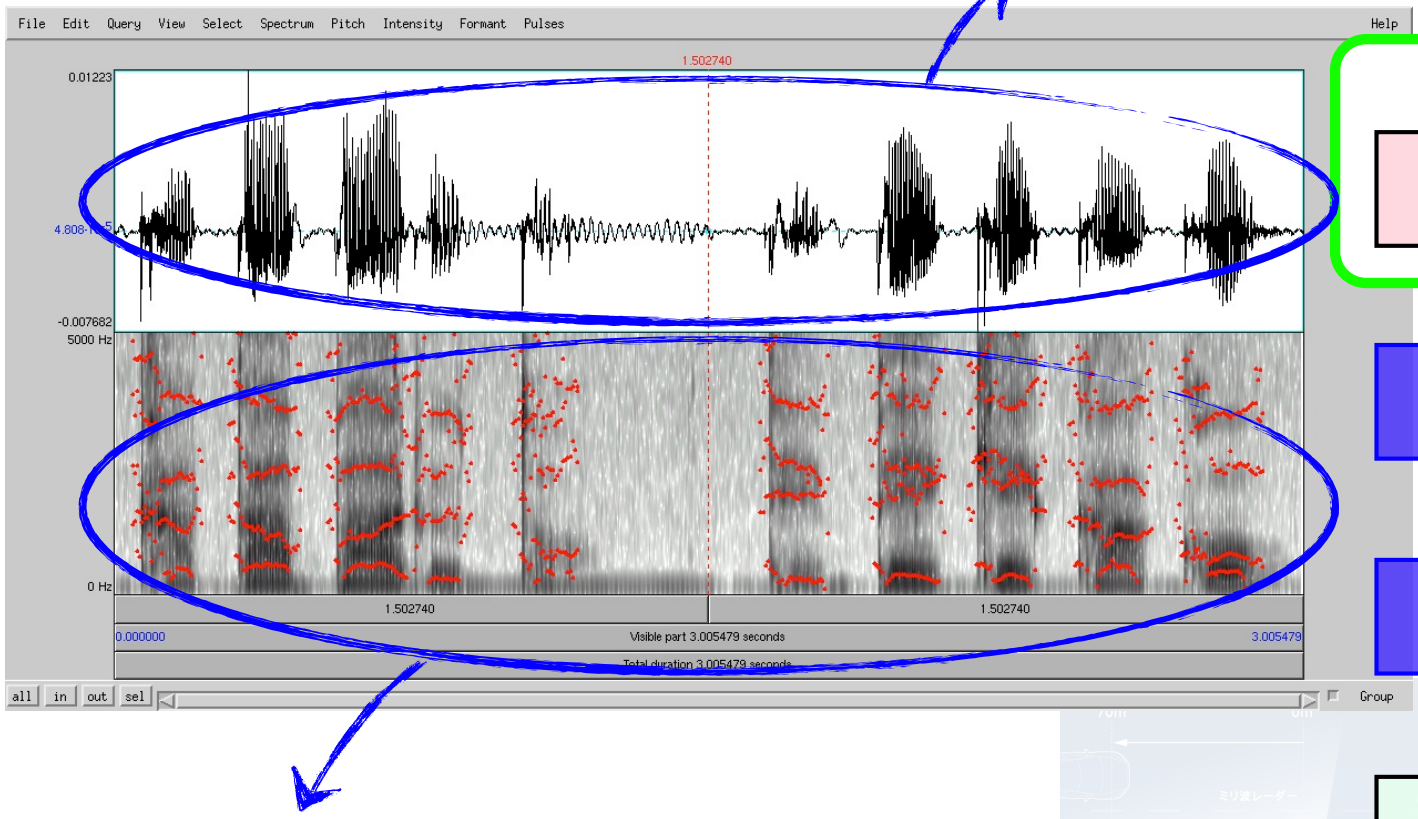
http://www.volvocars.com/jp

http://av.jpn.support.panasonic.com/

身の回りの信号処理

音声認識

音の強弱の時間変化



周波数分布(スペクトル)の時間変化

マイク

電気信号(音声)

ノイズ除去

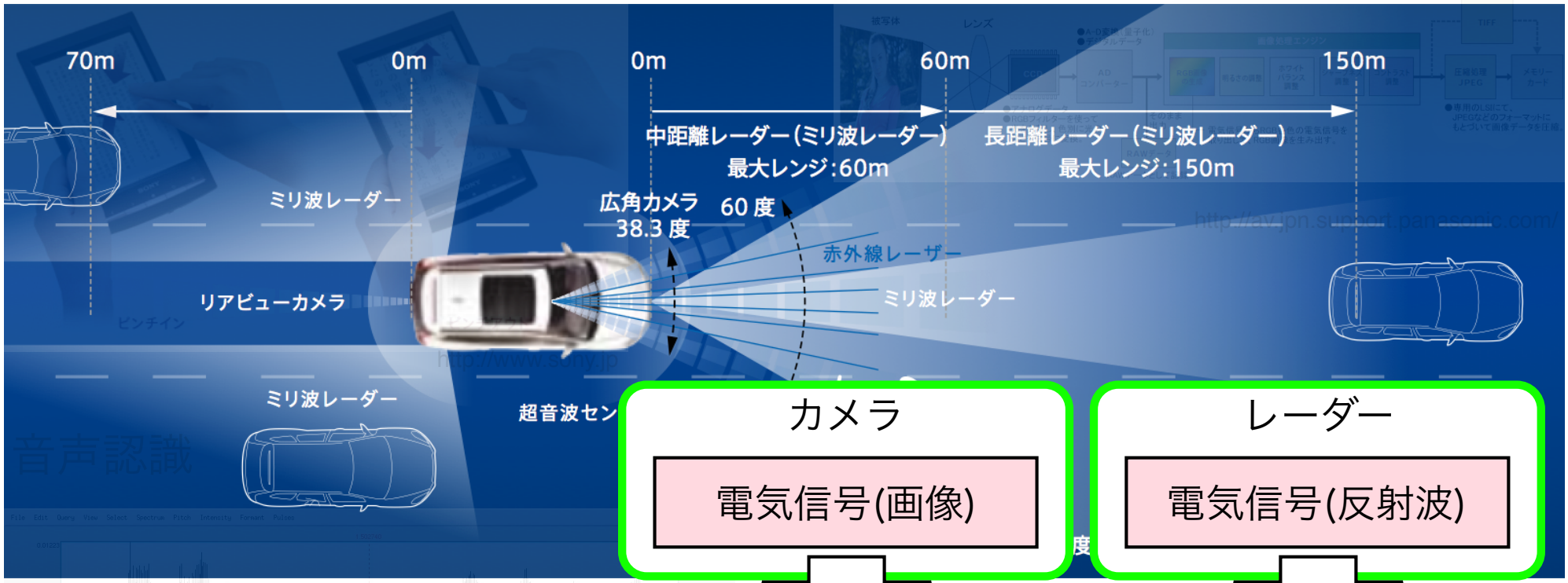
スペクトル変換

解析・認識

http://www.f.waseda.jp/kitahara/

身の回りの信号処理

自動ブレーキ

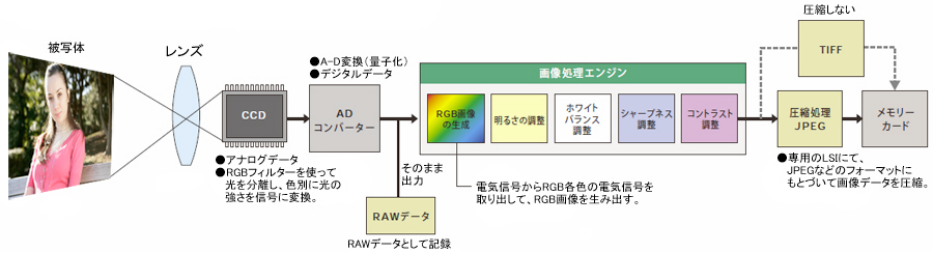


http://www.volvocars.com/jp

身の回りの信号処理

タブレット・スマートフォン

デジタルカメラ

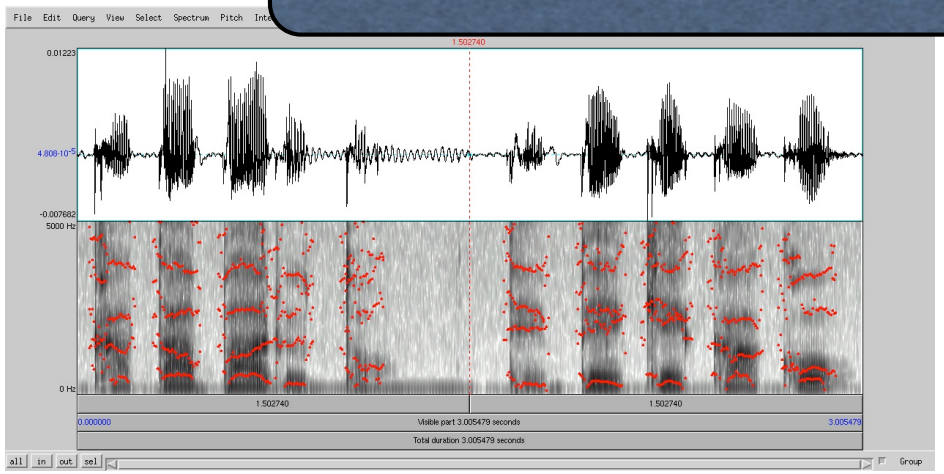


ort.panasonic.com/

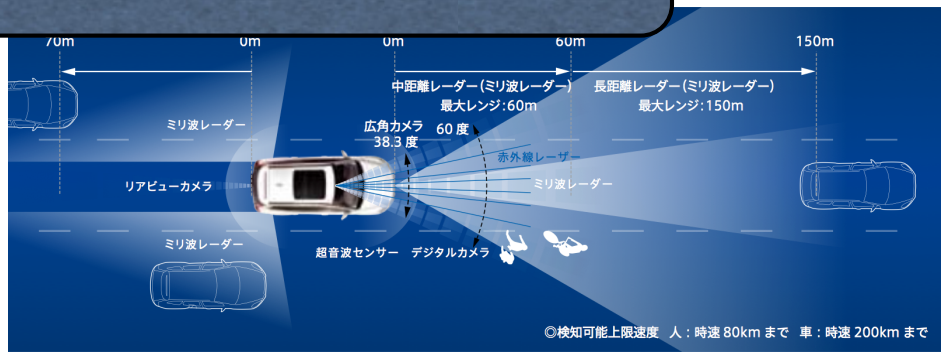
信号処理

入力信号に演算(計算)を行うことで
解析に必要な情報の抽出を行うこと

音声認識



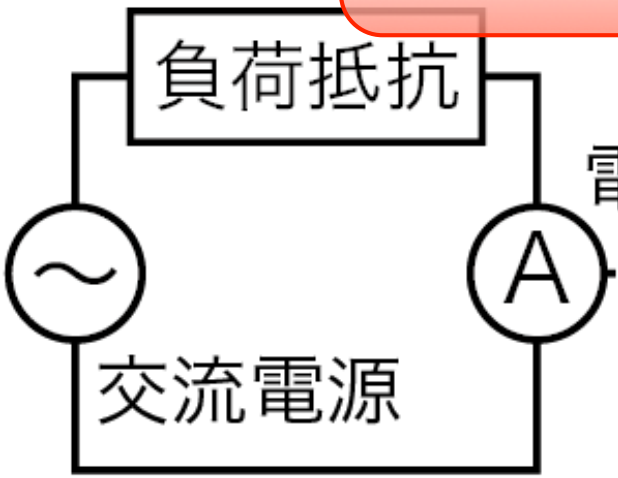
http://www.f.waseda.jp/kitahara/

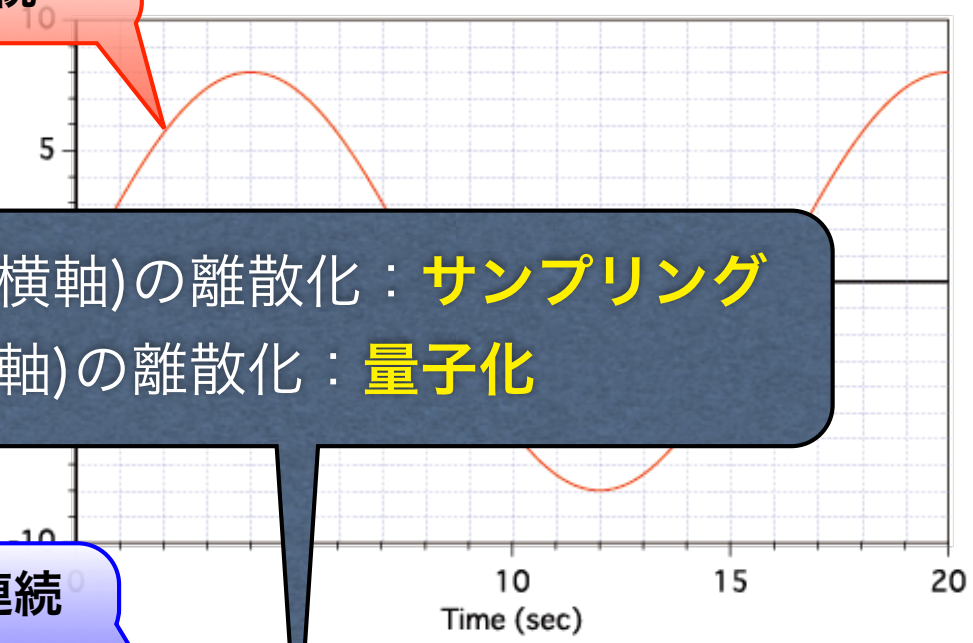


http://www.volvocars.com/jp

アナログとディジタル(デジタル)

アナログ：時間・電流とも**連続**





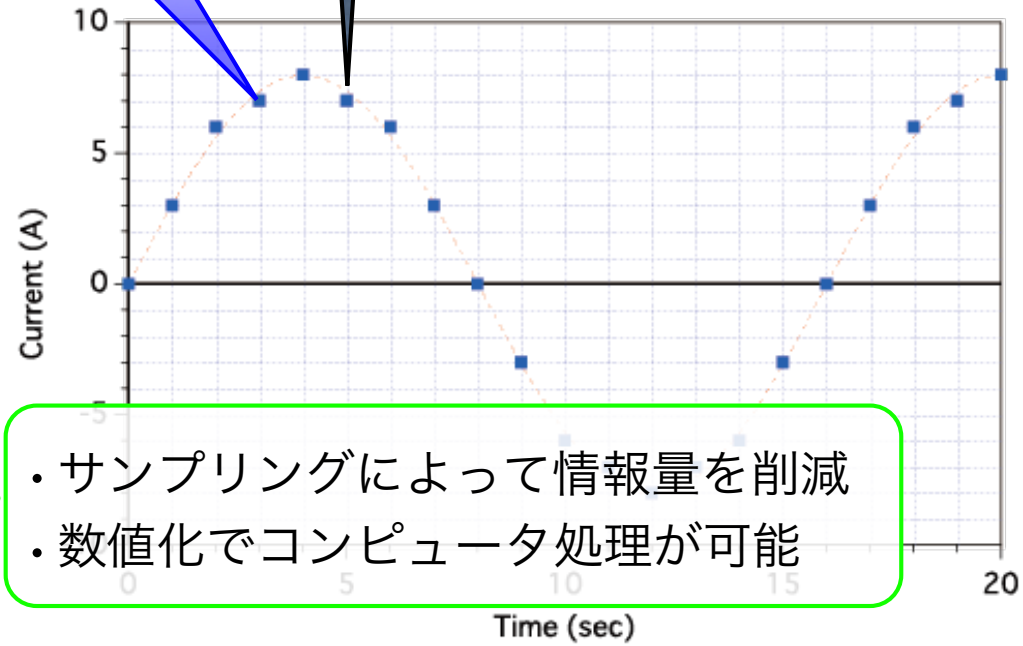
変数(横軸)の離散化：**サンプリング**
値(縦軸)の離散化：**量子化**

ディジタル：時間・電流とも**不連続**

デジタル信号からアナログ信号を生成するのは**DA変換**

AD 変換器

AD変換器は、連続なアナログ量を
離散化(ディジタル化)して数値列に変換



- サンプリングによって情報量を削減
- 数値化でコンピュータ処理が可能

ビットとバイト

コンピュータが扱う数値：**二進数**(0と1の2値で表現)

0: 0000
1: 0001
2: 0010
3: 0011
:
9: 1001
A(10): 1010
:
E(14): 1110
F(15): 1111

二進数の桁数を**ビット数(bit: b)**と呼ぶ
4ビットで表現できる数値は0～Fの16種類(2^4)

4bit: 16
8bit: 256
10bit: 1024
12bit: 4096
16bit: 65536
32bit: 約43億
64bit: 約1.8×10^{19}

8bitを単位として**バイト(Byte: B)**と呼ぶ

1024B: 1KB(キロ)
1024KB: 1MB(メガ)
1024MB: 1GB(ギガ)
1024GB: 1TB(テラ)
1024TB: 1PB(ペタ)

1000B
=1KB、1000KB=1MBとする使い方もあり、これらと区別するために1024B=1KiB、1024KiB=1MiB等と表記することもあ

二進数は表示桁数が増えるので、実際の表記では4bitを1桁とする16進数を用いる
1010010101101100 = A56C 等

ちょっと寄り道(データの圧縮)

例えば、左右2チャンネルのステレオ音声信号を16bit、40kHzでサンプリングしたとすると、その情報(データ)量は3分間(平均的な1曲の長さ)で

$2(ch)\times2(B)\times40000(個/s)\times180(s)=4.8\times10^6(B)$ = 28.8MB

非圧縮の場合

1000曲分だと、28.8MB×1000 = **28.8GB／1000曲**

一般的なデジタル音楽プレーヤー：約**4GB／1000曲**…15%程度の容量

圧縮されている

データ圧縮の分類

可逆圧縮：伸長すれば完全に元の状態に戻せる

プログラムや一般データ、高品質画像など可逆性が必須の用途に用いる

通常は最大で半分程度まで圧縮可能 (データ内容によっては増えることも！)

Apple-Lossless、Dolby-TrueHD、GIF、PNG、LZH、ZIP等

非可逆圧縮：ある程度の劣化が入るため、元には戻らない

音楽や画像・映像など、多少の劣化が実用上問題ない用途に用いる

劣化の許容度に依存し、1/10〜1/100に圧縮可能

MP3、AAC、JPEG、MPEG-4

ちょっと寄り道(データの圧縮)

例えば、左右2チャンネルのステレオ音声信号を16bit、40kHzでサンプリングしたとすると、その情報(データ)量は3分間(平均的な1曲の長さ)で、

$2(ch)\times2(B)\times40000(個/s)\times180(s)=4.8\times10^6(B)$ = 28.8MB

1000曲分だと、28.8MB×1000 = **28.8GB／1000曲**

データ圧縮の分類

可逆圧縮：伸長すれば完全に元の状態に戻せる

プログラムや一般データ、高品質画像など可逆性が必須の用途に用いる

通常は最大で半分程度まで圧縮可能 (データ内容によっては増えることも！)

Apple-Lossless、Dolby-TrueHD、GIF、PNG、LZH、ZIP等

非可逆圧縮：ある程度の劣化が入るため、元には戻らない

音楽や画像・映像など、多少の劣化が実用上問題ない用途に用いる

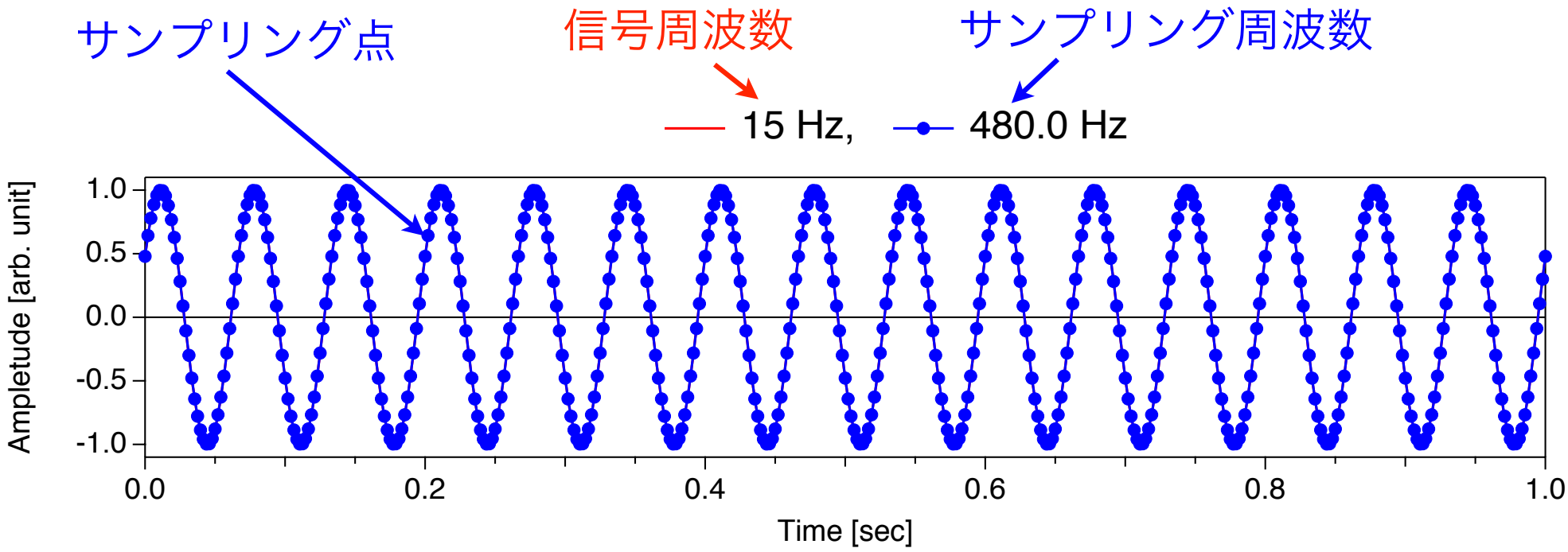
劣化の許容度に依存し、1/10〜1/100に圧縮可能

MP3、AAC、JPEG、MPEG-4

非可逆圧縮アルゴリズムの多くは、教科書の後半に出てくる離散フーリエ変換(DFT)を応用している

サンプリング (標本化)

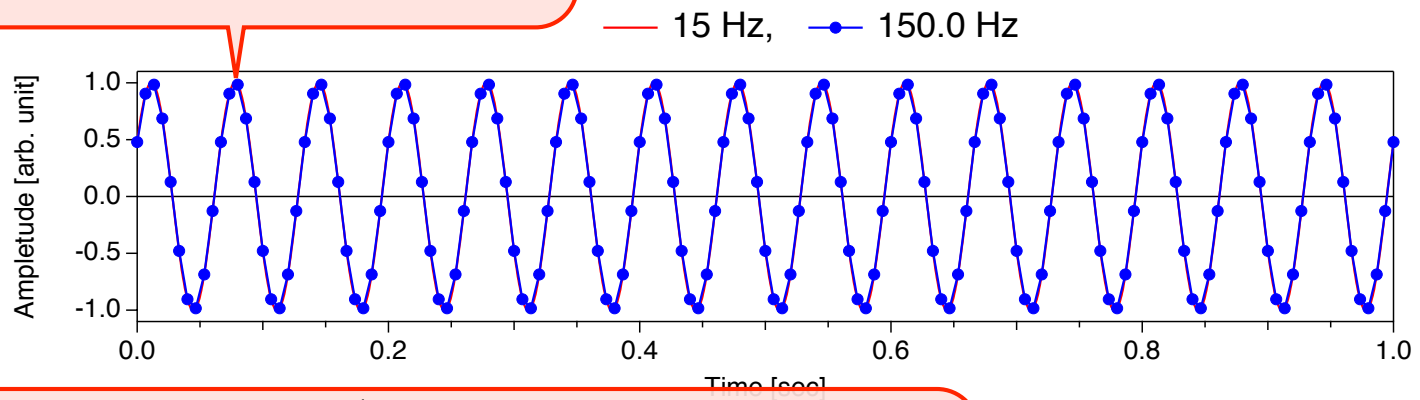
連続した(或は多数の)信号から、一部の信号を抜き出して記録すること



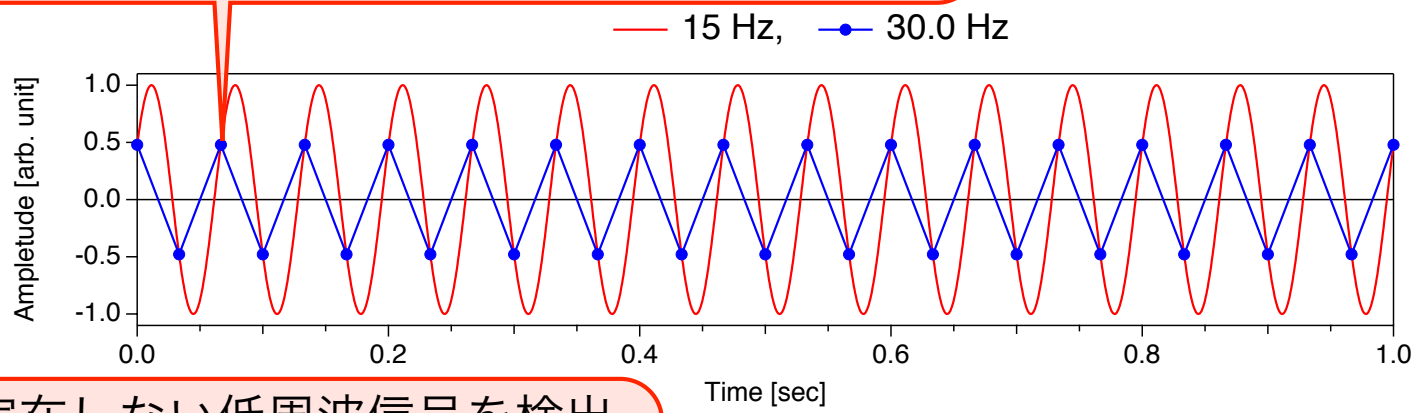
サンプリングによってデータ量を削減し、計算負荷を減らす

サンプリング定理

$f_s >> f_c$：概ね正しい波形を再現

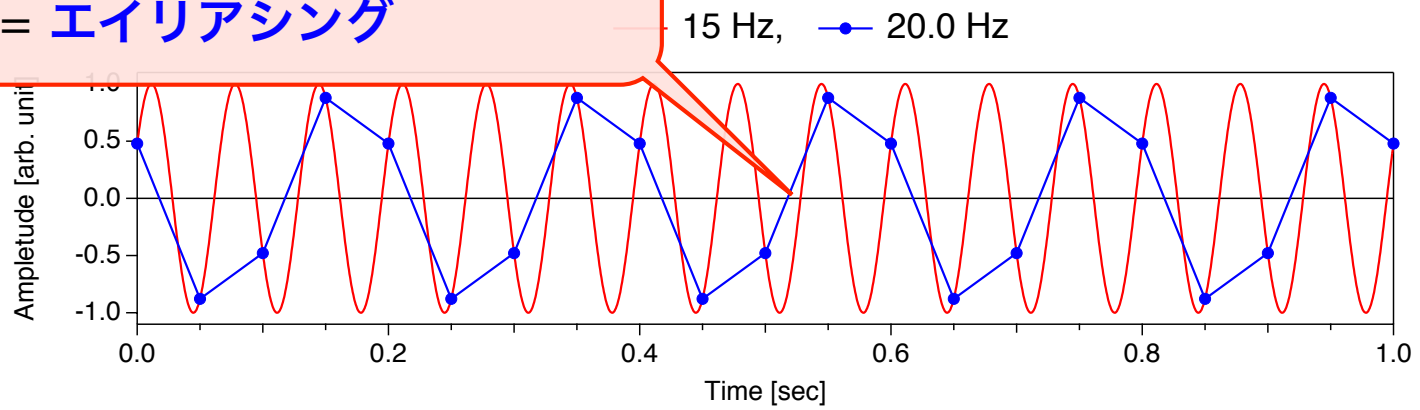


$f_s = 2f_c$：波形は崩れるが周波数は正しく得られる



$f_s < 2f_c$：実在しない低周波信号を検出

= **エイリアシング**

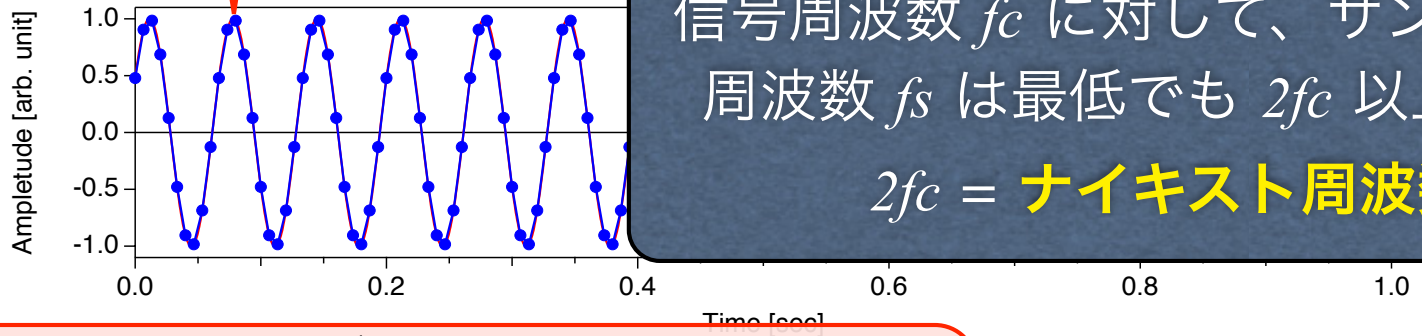


サンプリング定理

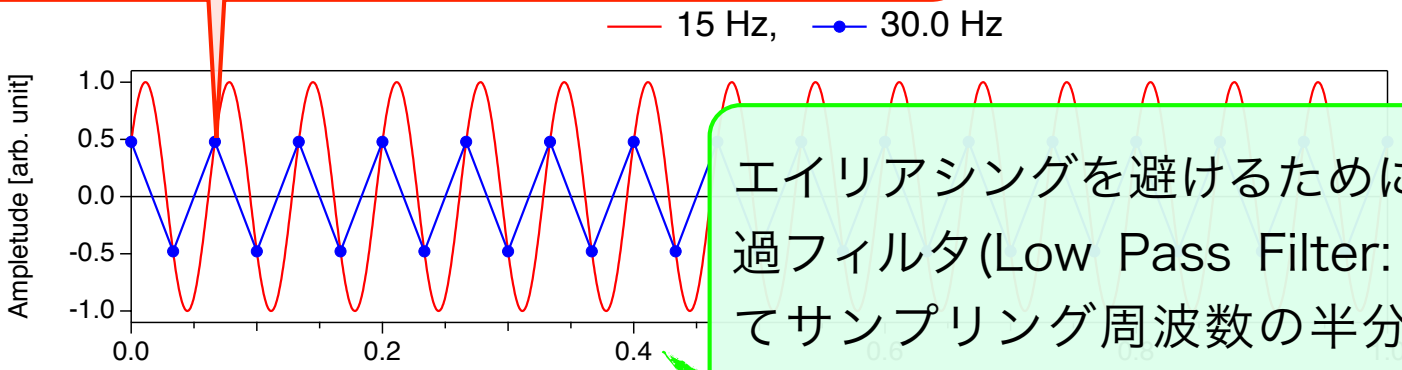
$f_s >> f_c$：概ね正しい波形を再現

信号周波数 fc に対して、サンプリング周波数 fs は最低でも $2fc$ 以上が必要

$2fc$ = **ナイキスト周波数**



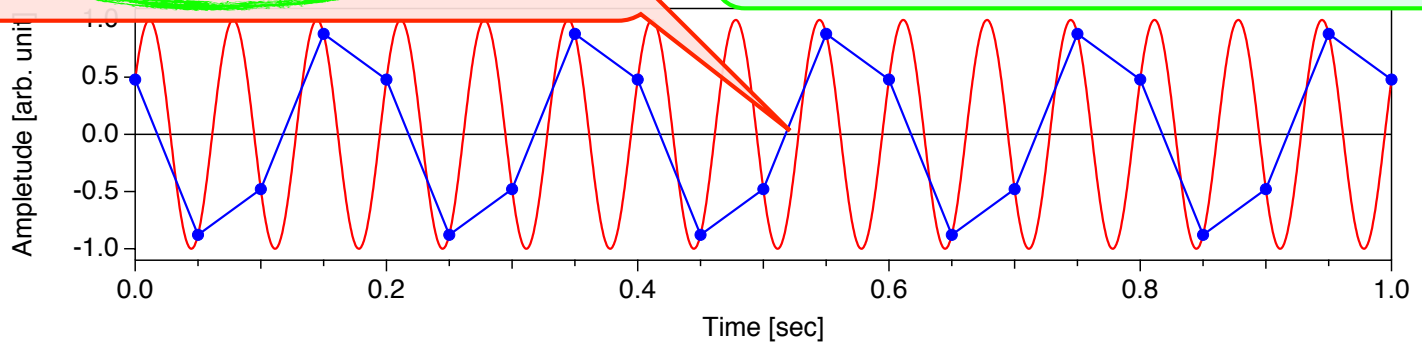
$f_s = 2f_c$：波形は崩れるが周波数は正しく得られる



$f_s < 2f_c$：実在しない低周波信号を検出

= **エイリアシング**

エイリアシングを避けるためには、低域通過フィルタ(Low Pass Filter: LPF)を通してサンプリング周波数の半分より高い周波数成分を除去してから、サンプリングを行う必要がある。



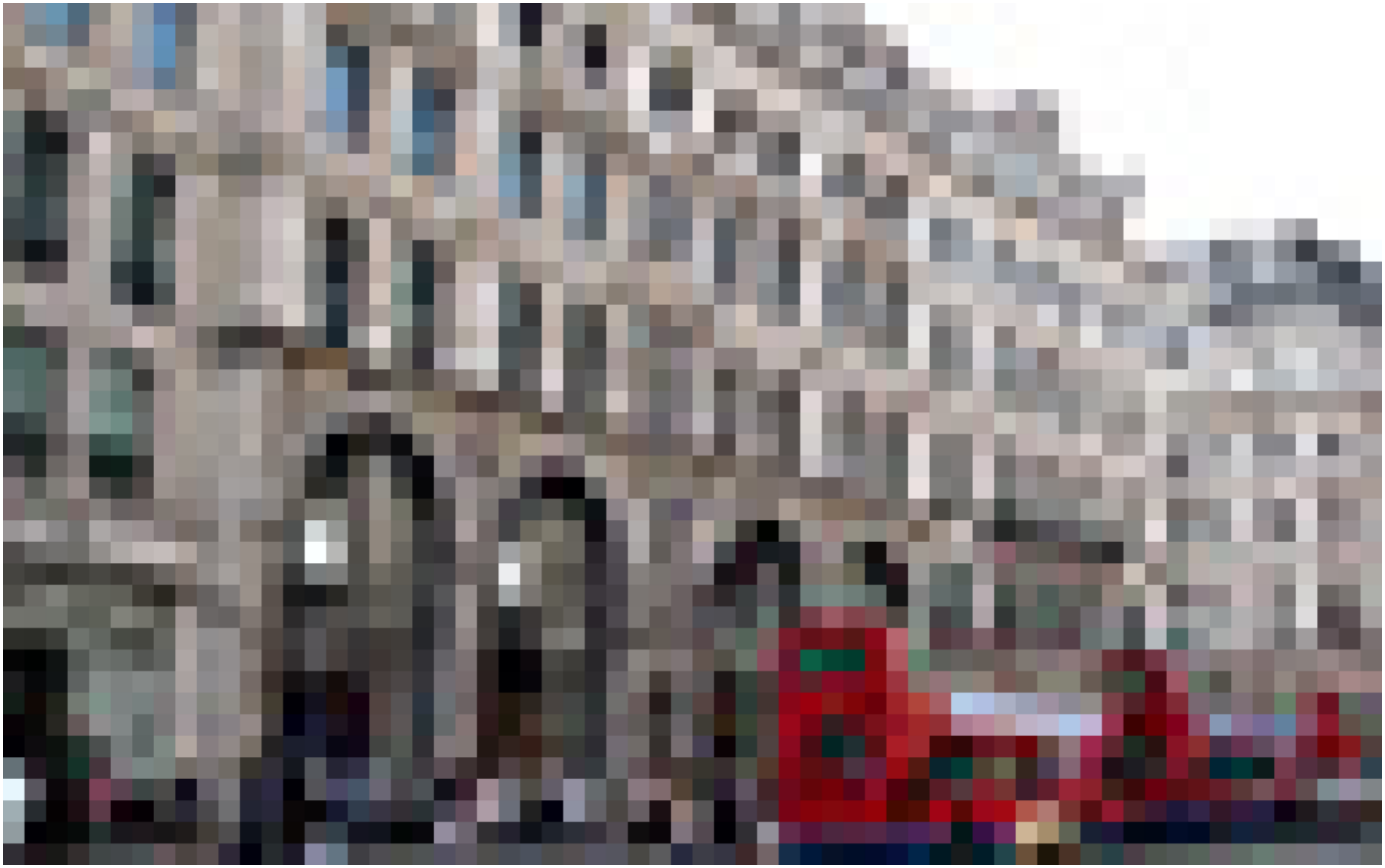
画像のサンプリング(画素数変化)

1024×640

画像のサンプリング(画素数変化)

256×160

画像のサンプリング(画素数変化)



64×40

画像のサンプリング(画素数変化)

16×10

画素数＝サンプリングの空間周波数に対応

画像のサンプリング(階調変化)

RGB各色256階調(8bit×3)

画像のサンプリング(階調変化)

RGB各色64階調(6bit×3)

画像のサンプリング(階調変化)

RGB各色16階調(4bit×3)

画像のサンプリング(階調変化)

RGB各色4階調(2bit×3)

画像のサンプリング(階調変化)

RGB各色2階調(1bit×3)

画像のサンプリング(階調変化)

モノクロ2階調(2値画像: 1bit)

階調＝量子化ビット数に対応

ちょっと寄り道(画像・動画の画素数と階調)

静止画

35mmフィルム：1000〜5000万画素相当(アナログ/1000階調程度)
スマホ・携帯電話のカメラ：400〜2000万画素(8〜10bit)
デジタル一眼レフカメラ：2400〜3600万画素(12〜14bit)

動画

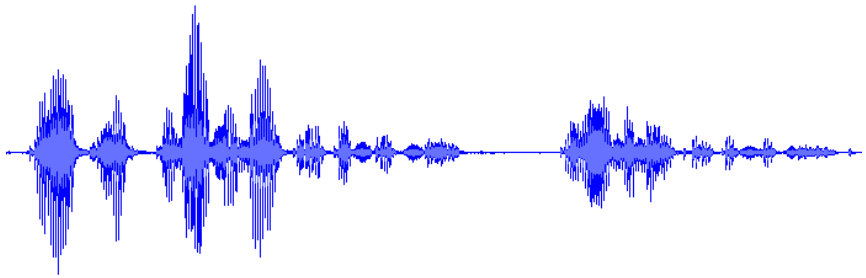
地デジ以前のテレビ放送：約32万画素相当(アナログ/100〜200階調程度)
地上波デジタル放送：155万画素(1440×1080/8bit)
BSデジタル放送：207万画素(1920×1080/8bit)
4K放送：830万画素(3840×2160/8bit)
8K放送：3320万画素(7680×4320/8bit)

人間の目

静止画で1000万画素程度、動画で100万画素程度(諸説あり)
200階調程度(同時識別する場合)
　人の場合は網膜の性能だけで決まるのではなく、脳で処理して画像認識しているので、状況に応じて重点処理のポイントを切り替えられる

信号の分類

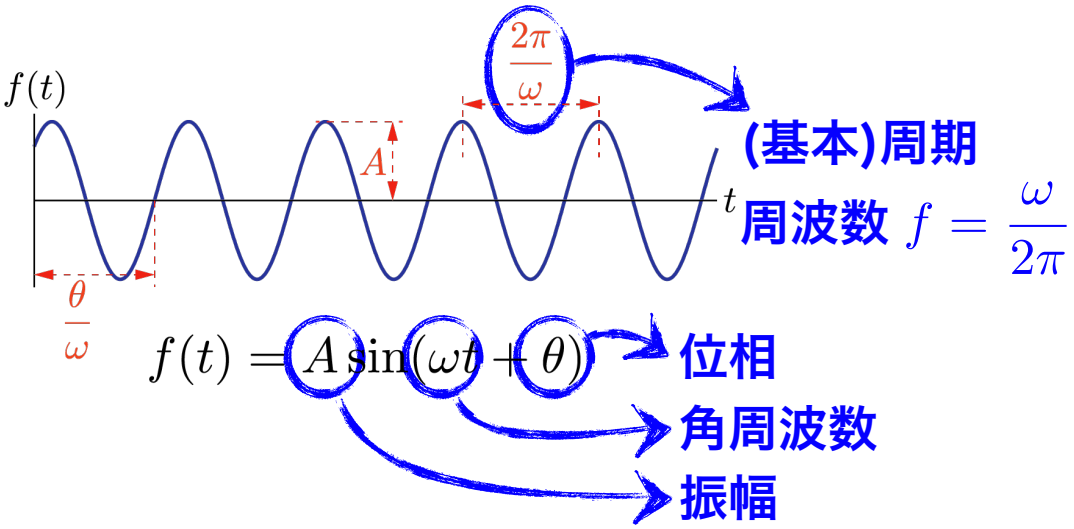
不規則信号：規則性がなく、数学関数で表現できない信号
(多くの測定信号は不規則信号)

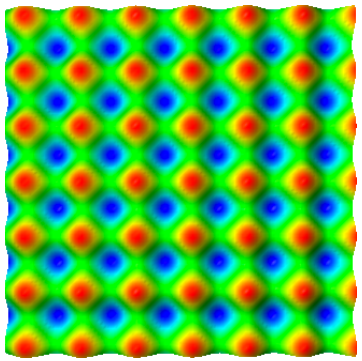


音声信号：時間に対する音の振幅

カラー画像信号：位置に対するRGB各色の明るさ

確定信号：数学関数で表現できる信号
(人為的に作り出した正弦波など、多くは周期信号)

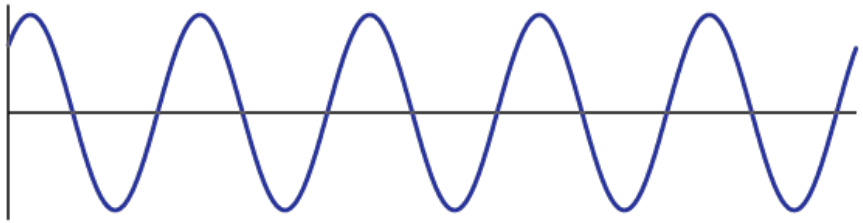




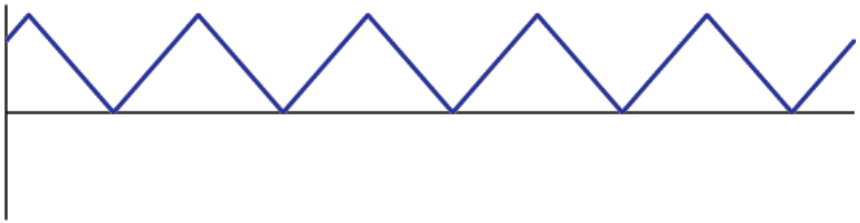
周期画像： $f(x,y) = \sin(x)+\cos(y)$

各種の波形

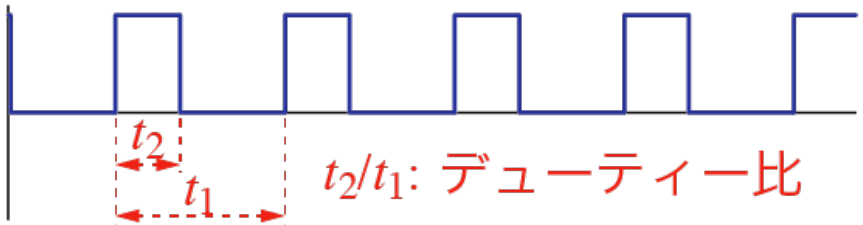
正弦波



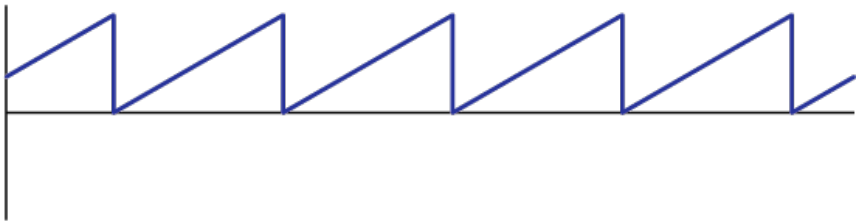
三角波



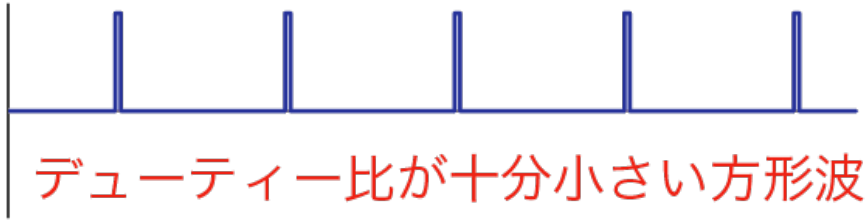
方形波 (矩形波)



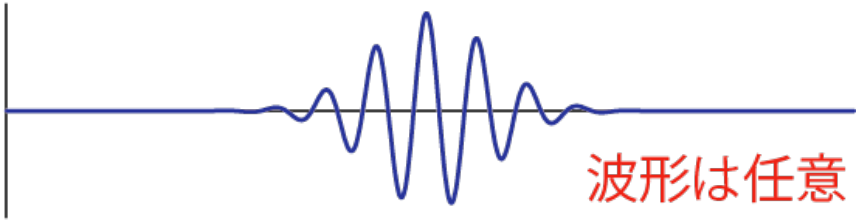
のこぎり波



パルス波



孤立波

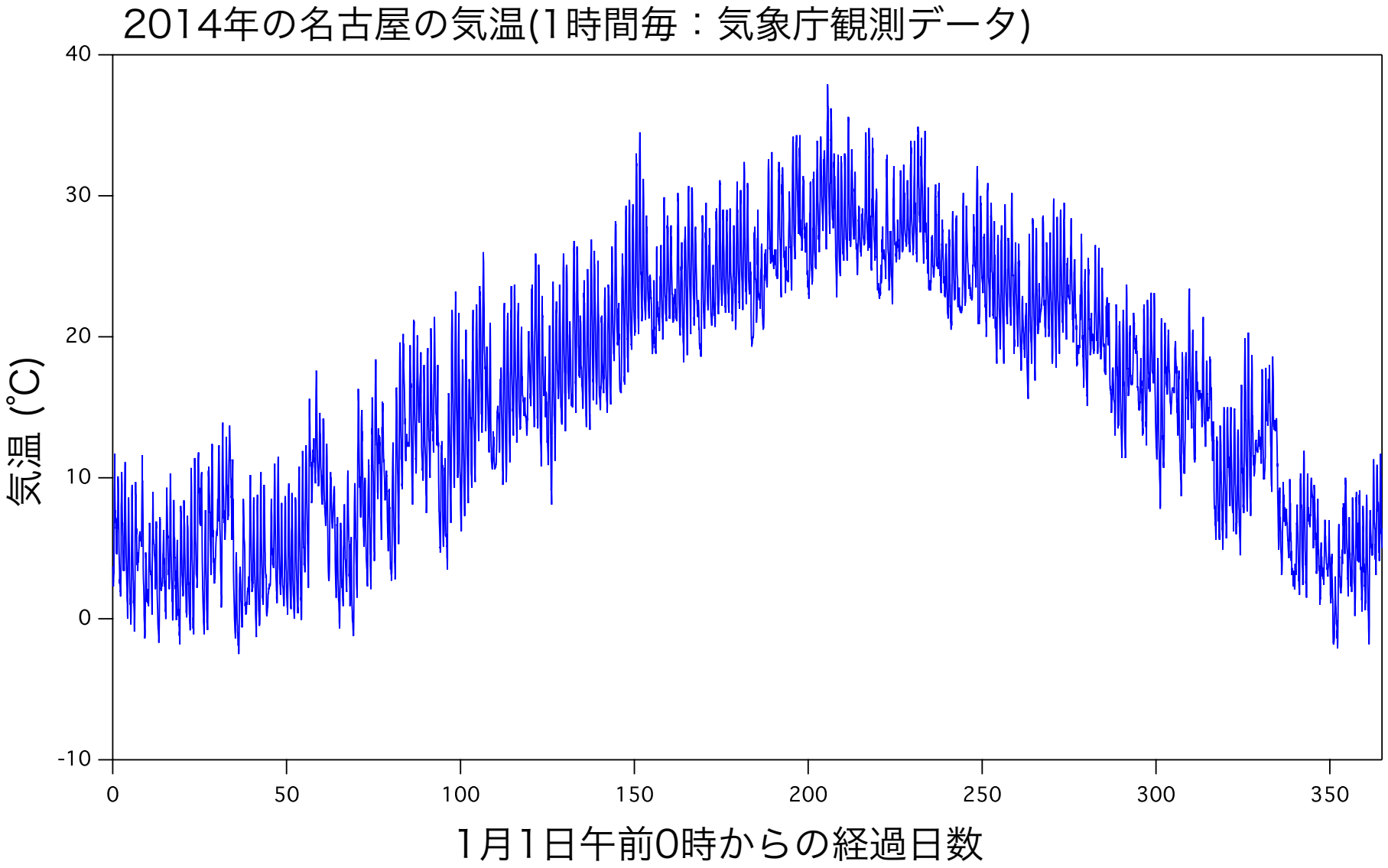


第2章 信号処理の例

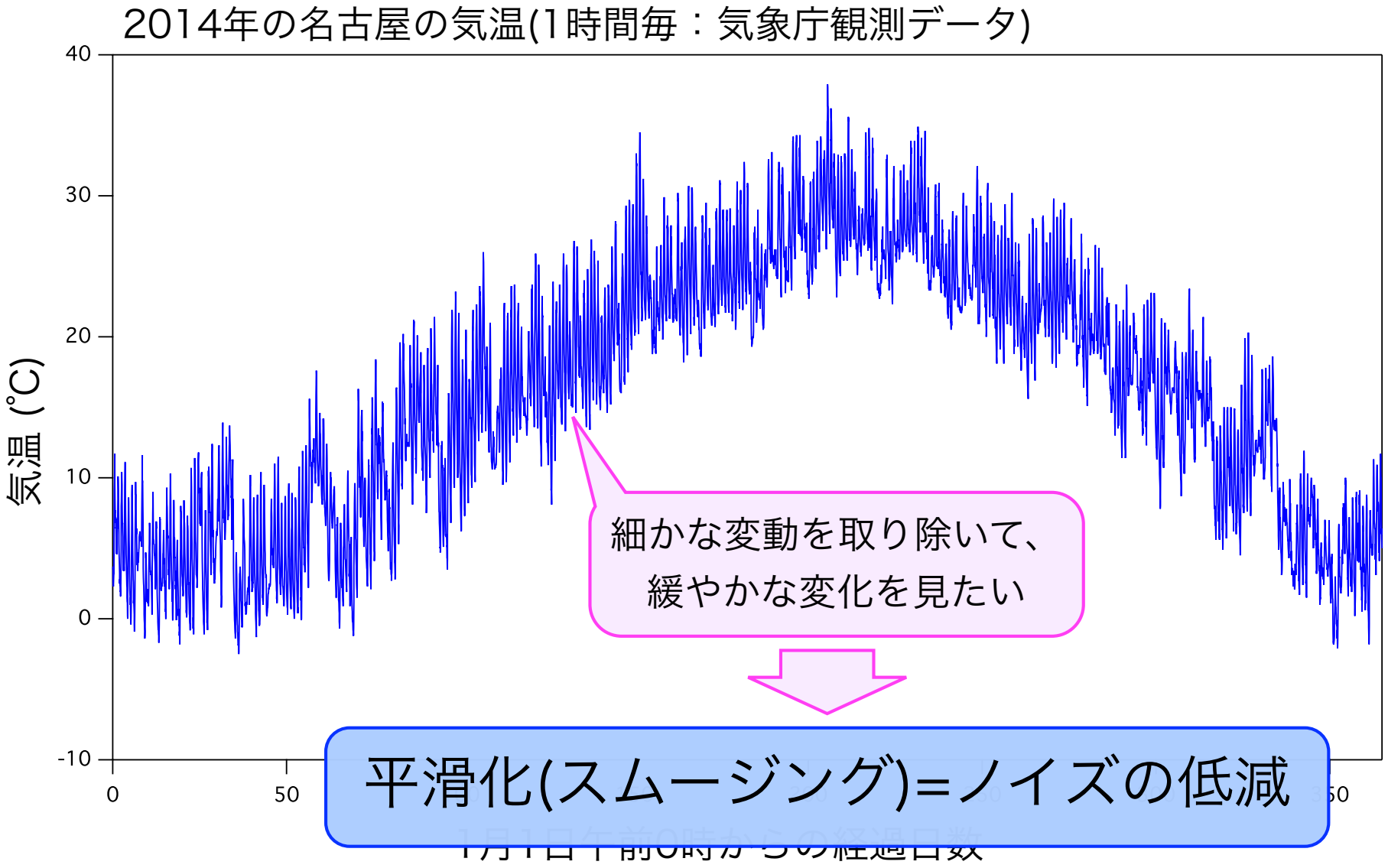
教科書 pp19–26

- 平滑化(ノイズの低減)
- 終端処理(信号の周期化)
- 同期加算(ノイズの圧縮)

信号処理の実例(少しだけ数学)



信号処理の実例(少しだけ数学)



平滑化のアルゴリズム

- **単純移動平均(ボックスフィルタ)**
- ガウシアンフィルタ(加重移動平均)
- 二項フィルタ(加重移動平均)
- メジアン(中央値)フィルタ
- 最大値/最小値フィルタ
- Savitzky-Golayフィルタ(多項式)
- :

単純移動平均アルゴリズム

注目している点の前後の範囲で単純平均を行う

以下の15(=N)個のデータに対して、前後2(=K)点(計5点)の平均をとる場合

i :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
f_i =	3	2	6	8	6	9	7	10	8	6	4	5	5	2	4

処理前の元データ

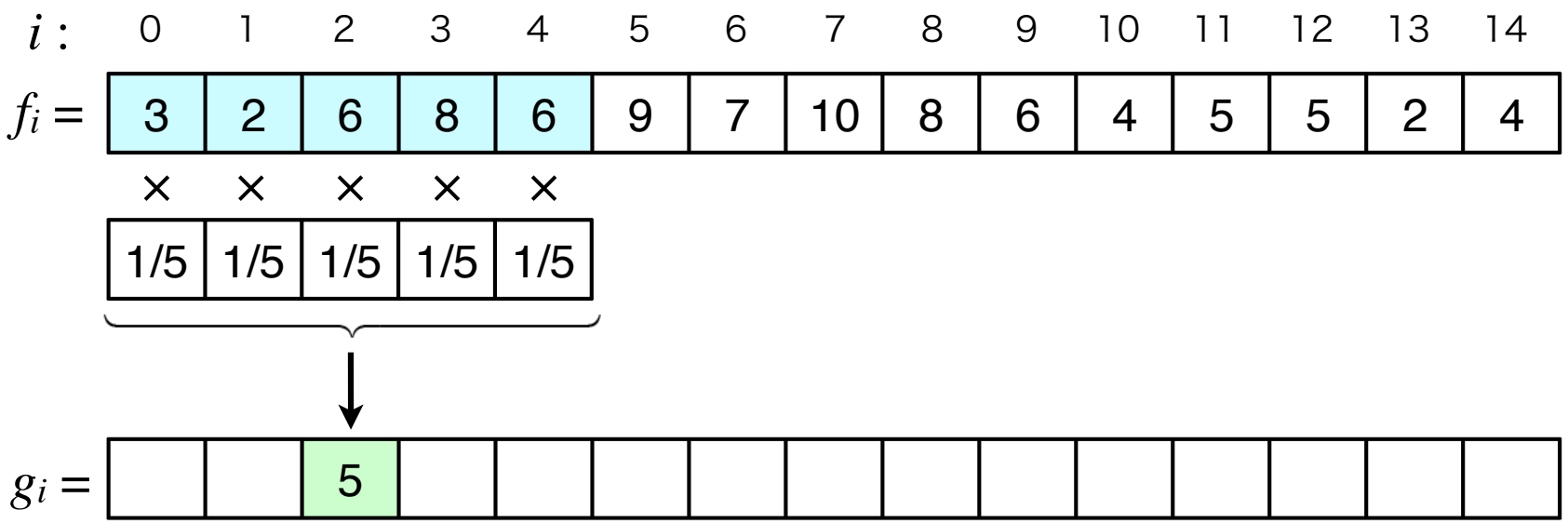
処理後のデータ

g_i =															

単純移動平均アルゴリズム

注目している点の前後の範囲で単純平均を行う

以下の15(=N)個のデータに対して、前後2(=K)点(計5点)の平均をとる場合

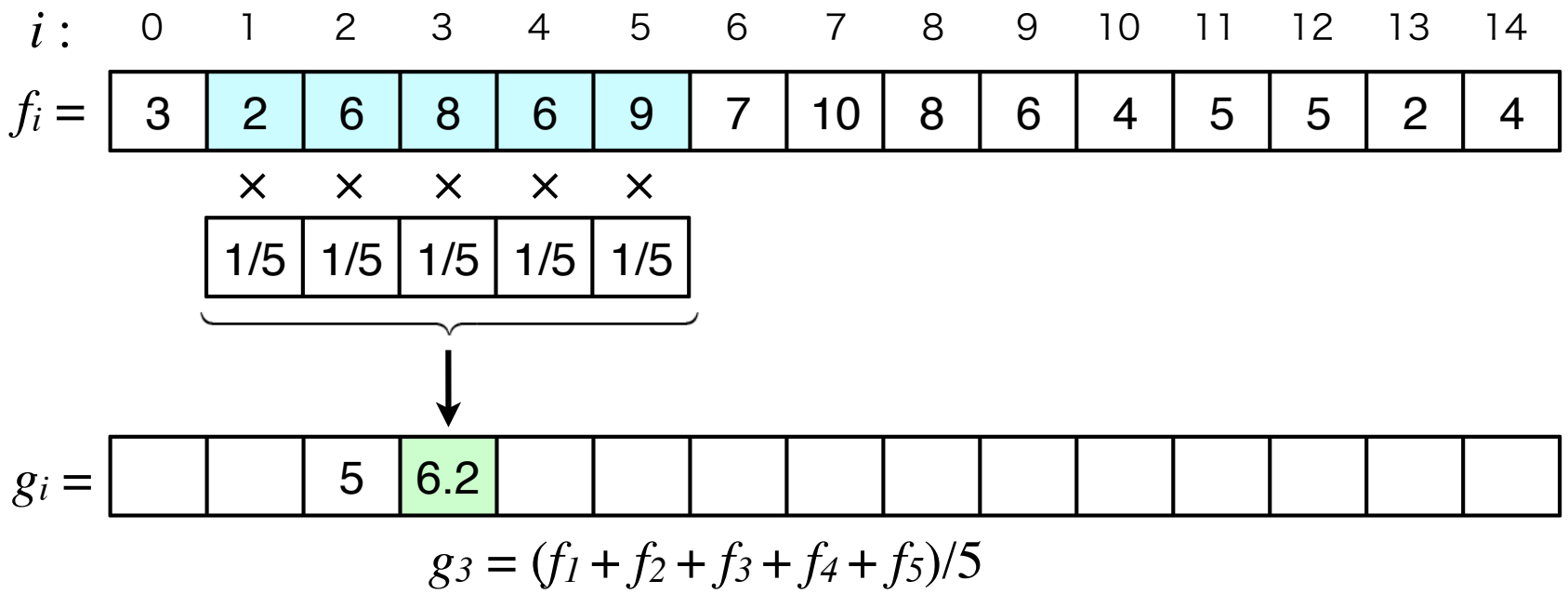


$$g_2 = (f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4)/5$$

単純移動平均アルゴリズム

注目している点の前後の範囲で単純平均を行う

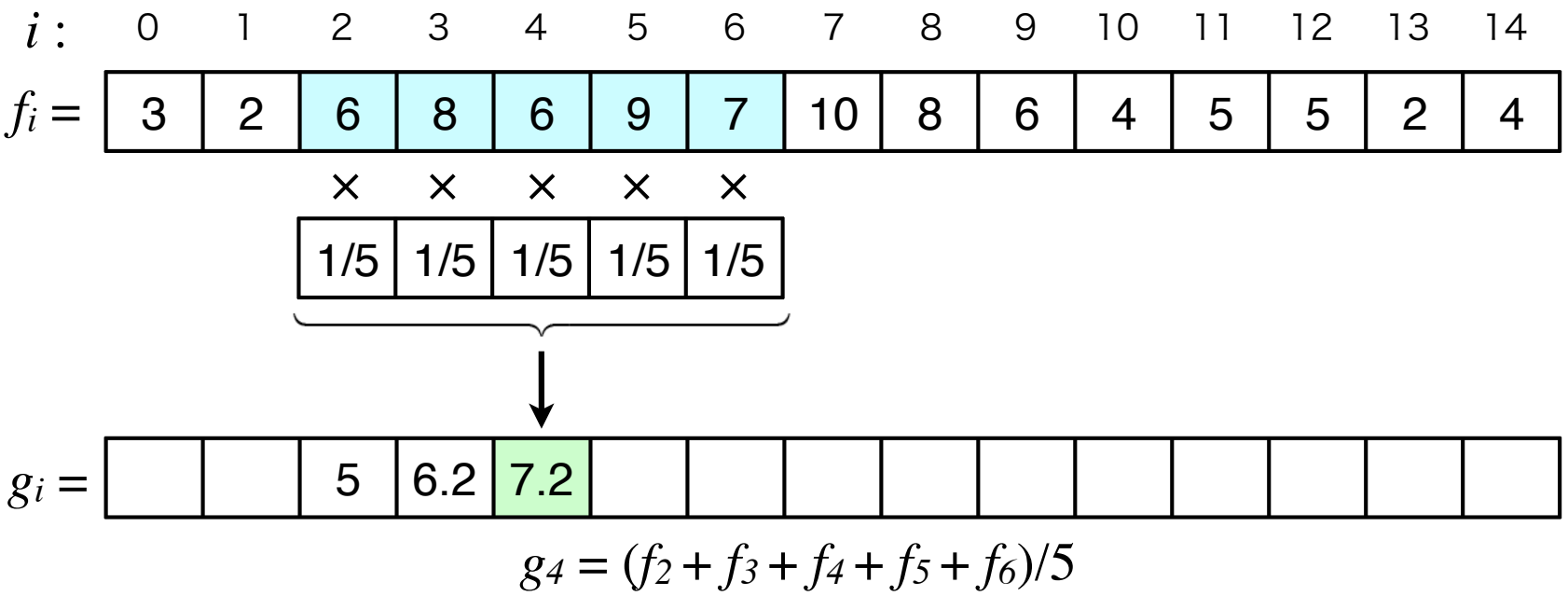
以下の15(=N)個のデータに対して、前後2(=K)点(計5点)の平均をとる場合



単純移動平均アルゴリズム

注目している点の前後の範囲で単純平均を行う

以下の15(=N)個のデータに対して、前後2(=K)点(計5点)の平均をとる場合

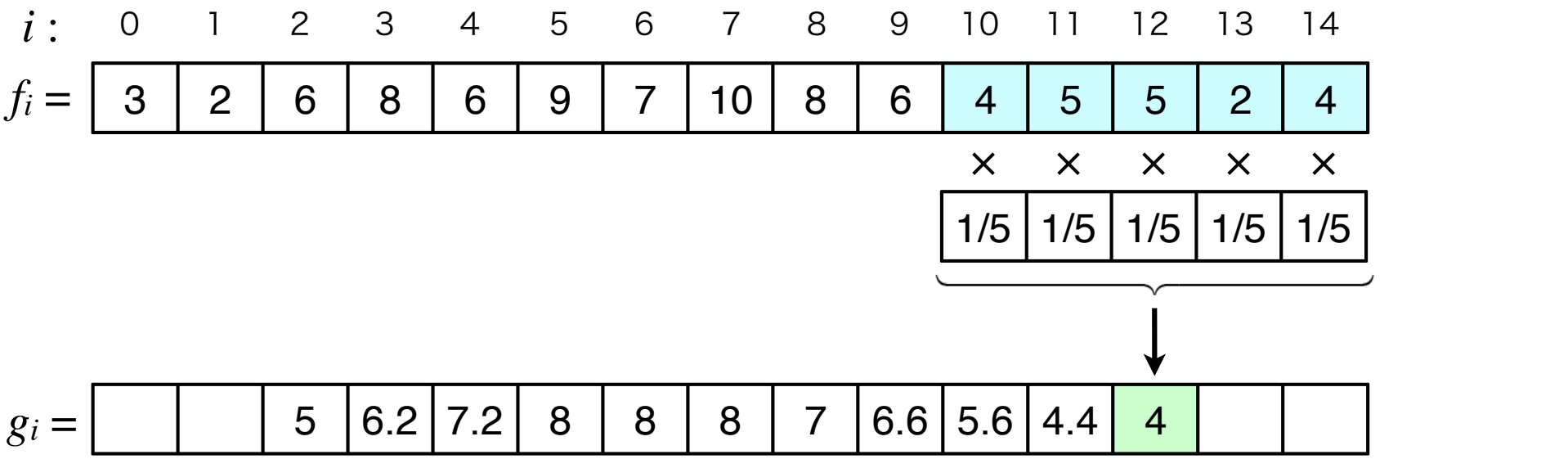


$$g_4 = (f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6)/5$$

単純移動平均アルゴリズム

注目している点の前後の範囲で単純平均を行う

以下の15(=N)個のデータに対して、前後2(=K)点(計5点)の平均をとる場合



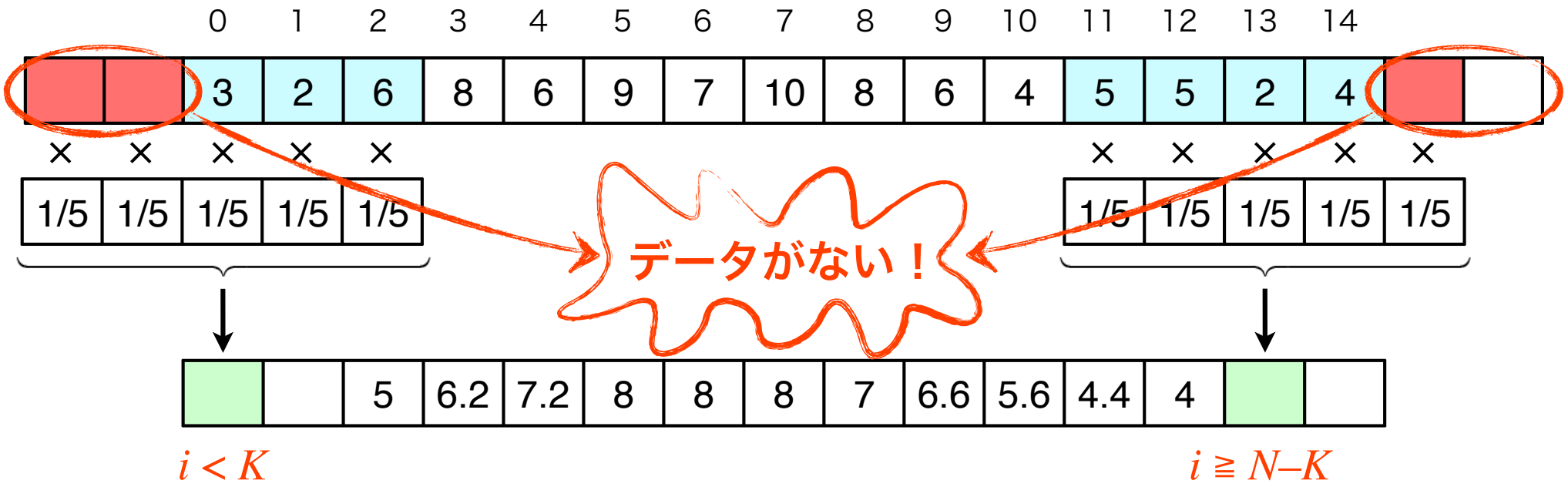
$$g_{12} = (f_{10} + f_{11} + f_{12} + f_{13} + f_{14})/5$$

$$g_i = \frac{1}{2K+1} \sum_{j=-K}^{K} f_{i+j}$$

単純移動平均アルゴリズム

注目している点の前後の範囲で単純平均を行う

以下の15(=N)個のデータに対して、前後2(=K)点(計5点)の平均をとる場合

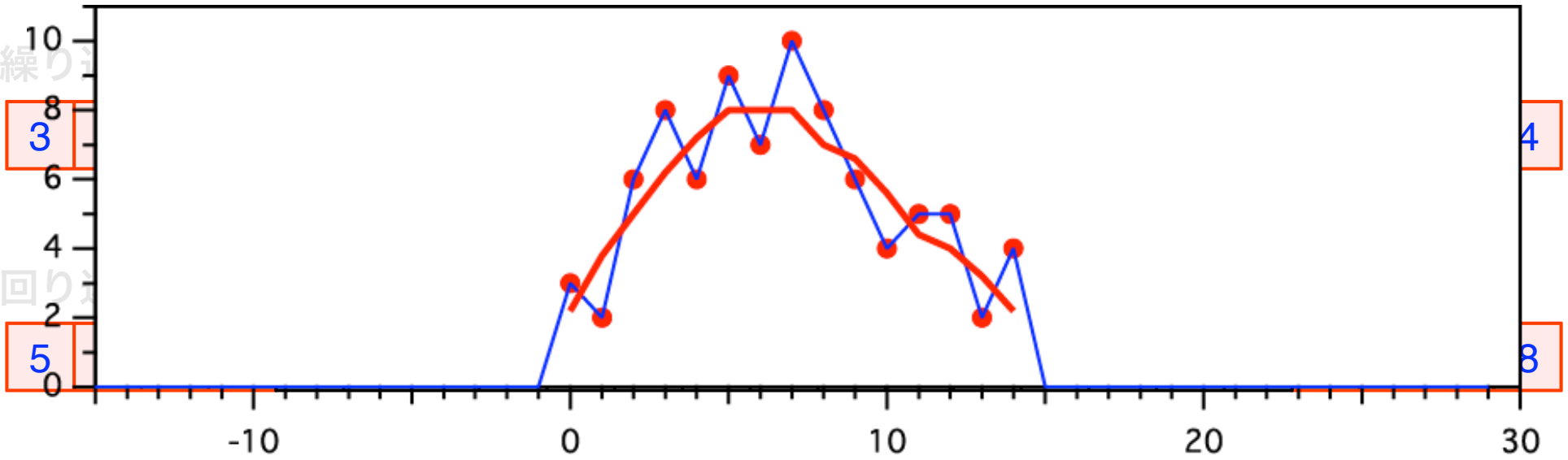


$$g_i = \frac{1}{2K+1} \sum_{j=-K}^{K} f_{i+j}$$

終端処理(信号の周期化)の方法

0終端 (zero fill)

0	0	0	0	3	2	6	8	6	9	7	10	8	6	4	5	5	2	4	0	0	0	0



折り返し終端[偶関数=線対象] (bounce, even)

6	8	6	2	3	2	6	8	6	9	7	10	8	6	4	5	5	2	4	2	5	5	4

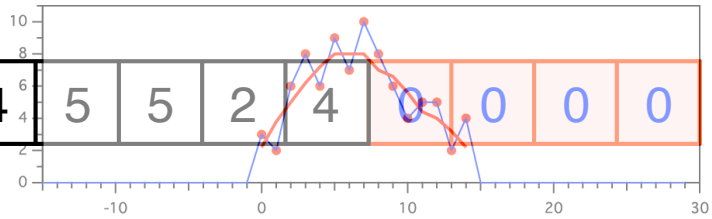
折り返し終端[奇関数=点対象] (bounce, odd)

-8	-6	-2	-3	3	2	6	8	6	9	7	10	8	6	4	5	5	2	4	-4	-2	-5	-5

終端処理(信号の周期化)の方法

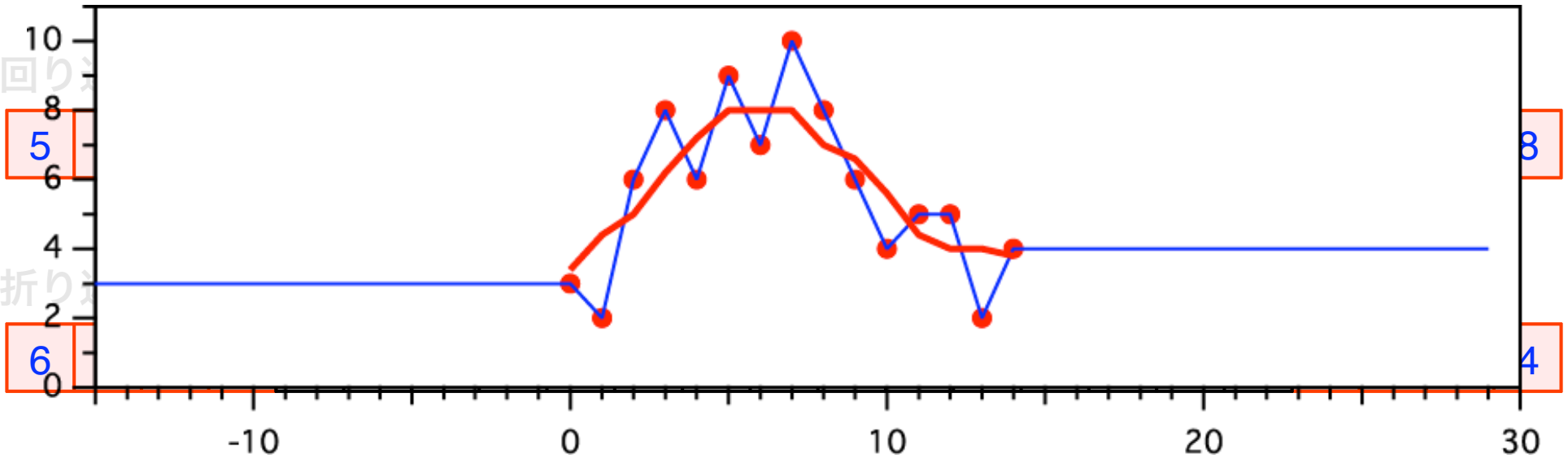
0終端 (zero fill)

0	0	0	0	3	2	6	8	6	9	7	10	8	6	4	5	5	2	4	0	0	0	0



繰り返し終端 (repeat)

3	3	3	3	3	2	6	8	6	9	7	10	8	6	4	5	5	2	4	4	4	4	4

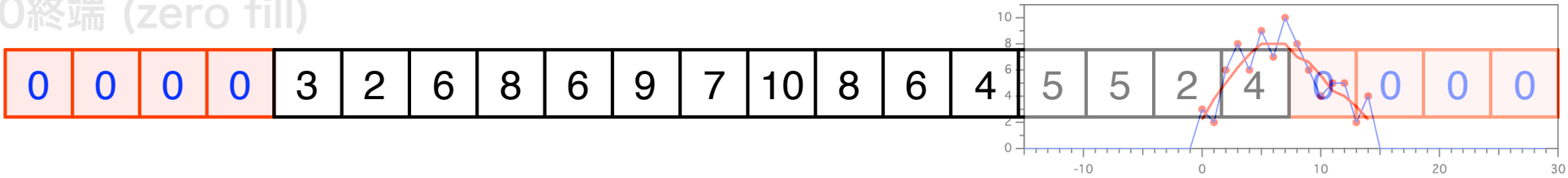


折り返し終端[奇関数=点対象] (bounce, odd)

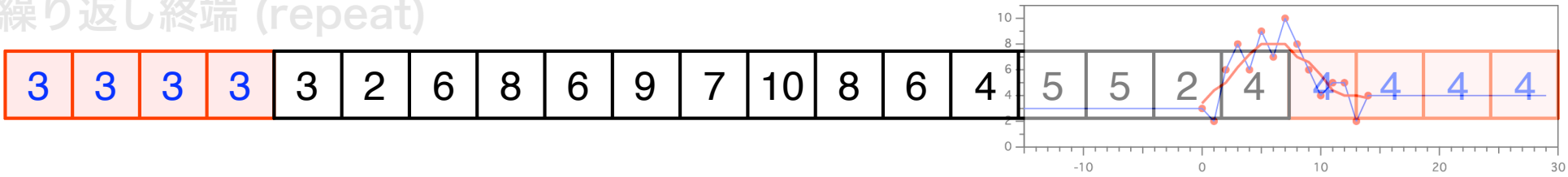
-8	-6	-2	-3	3	2	6	8	6	9	7	10	8	6	4	5	5	2	4	-4	-2	-5	-5

終端処理(信号の周期化)の方法

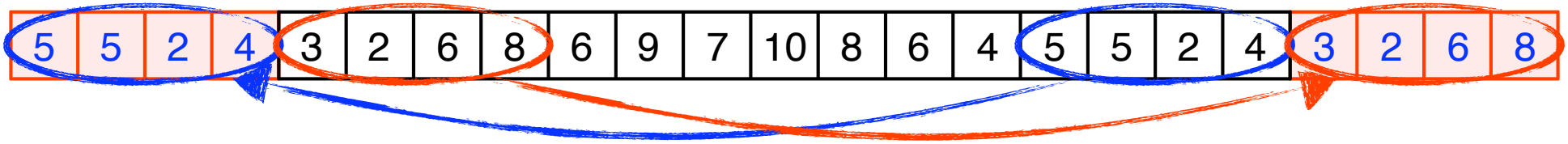
0終端 (zero fill)

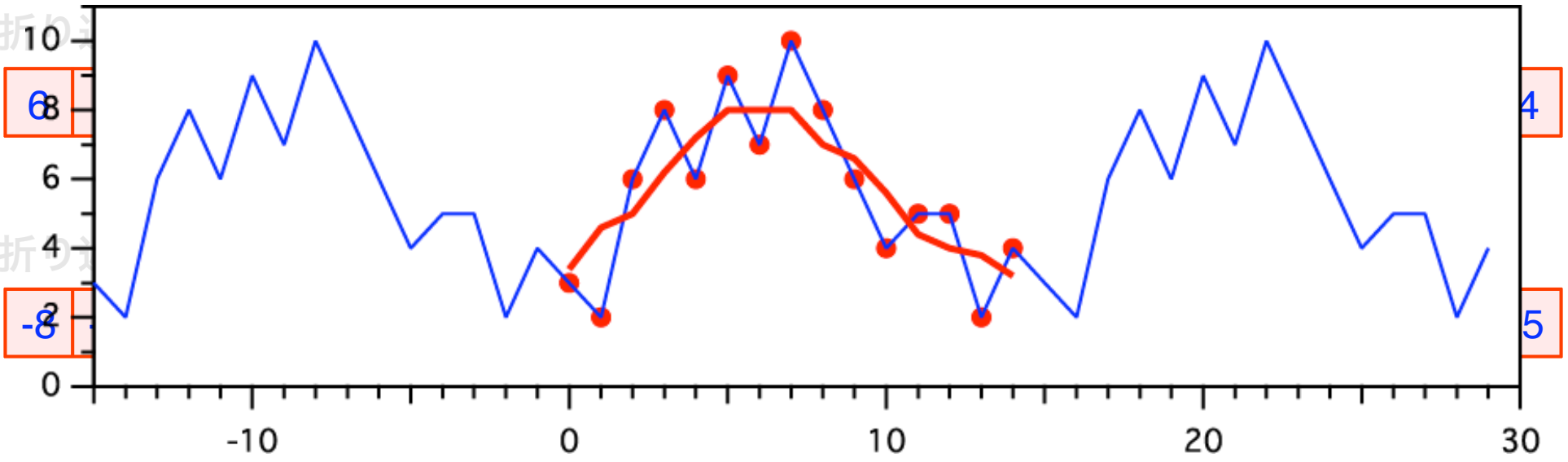


繰り返し終端 (repeat)

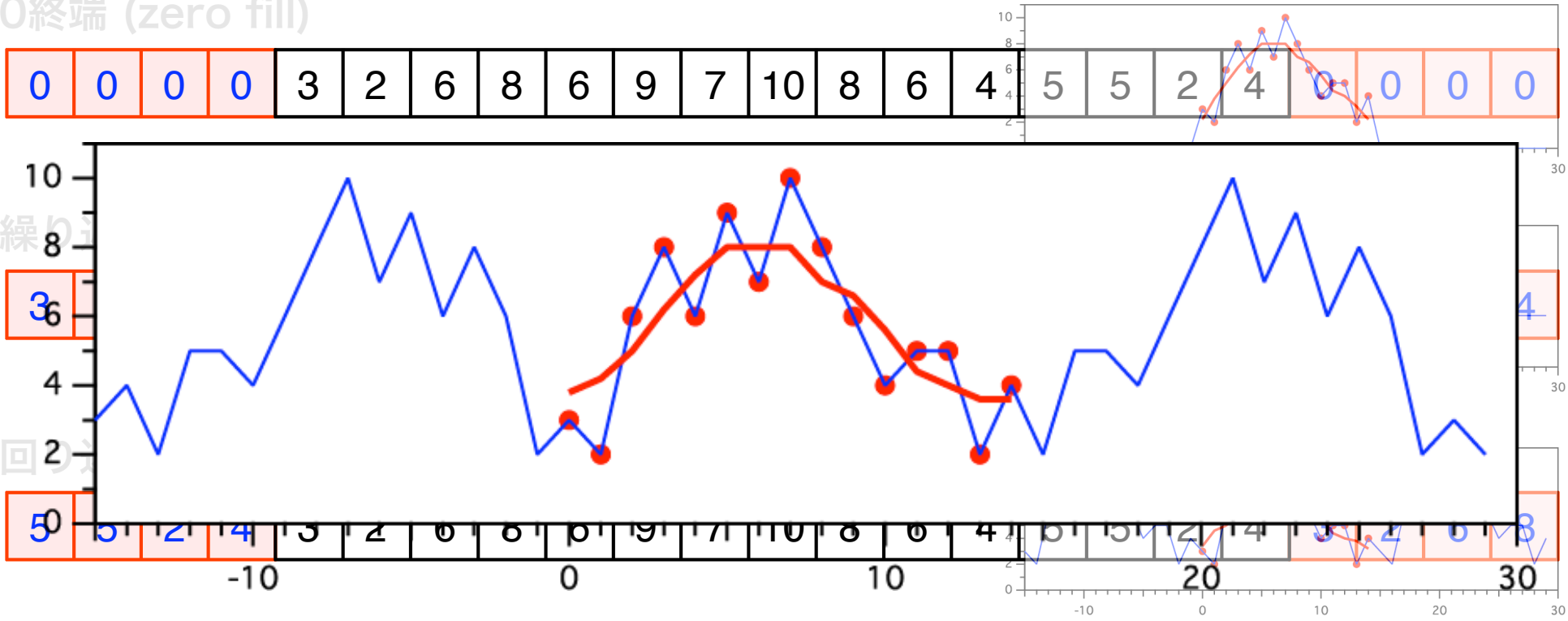


回り込み終端/周期境界 (wrap around/periodic boundary)

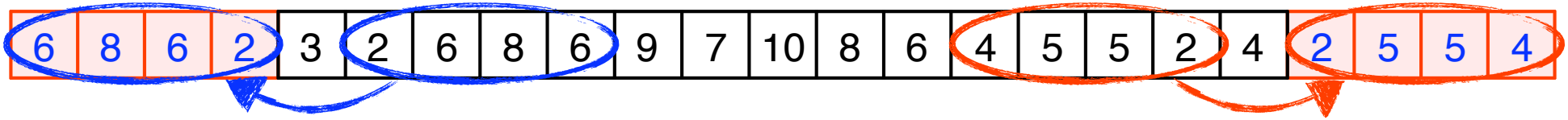




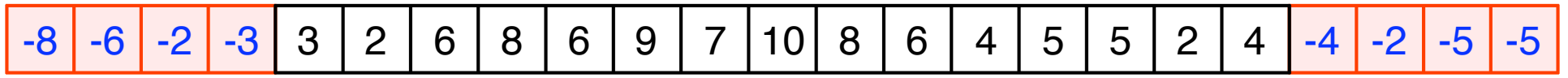
終端処理(信号の周期化)の方法



折り返し終端[偶関数=線対象] (bounce, even)

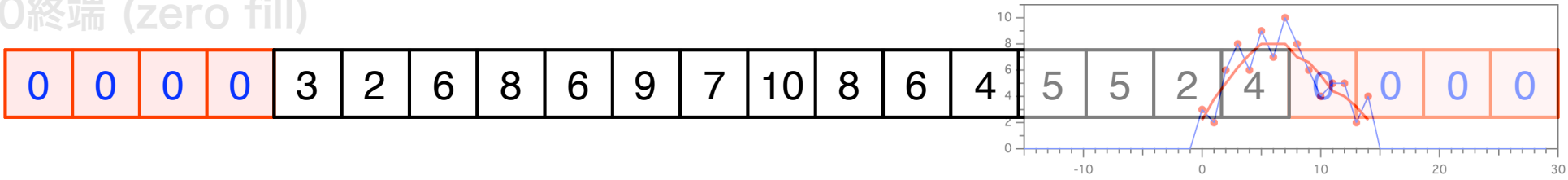


折り返し終端[奇関数=点対象] (bounce, odd)

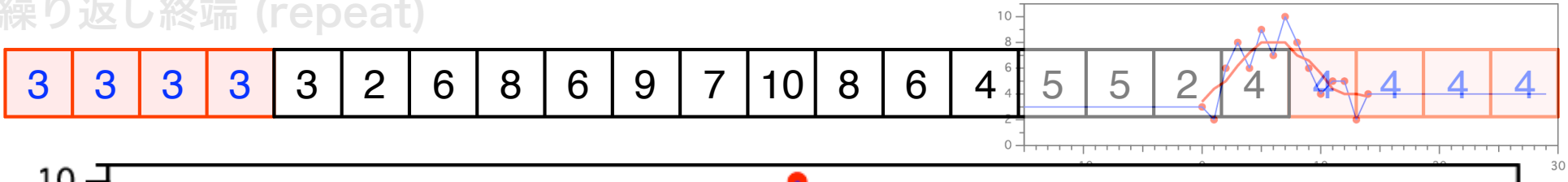


終端処理(信号の周期化)の方法

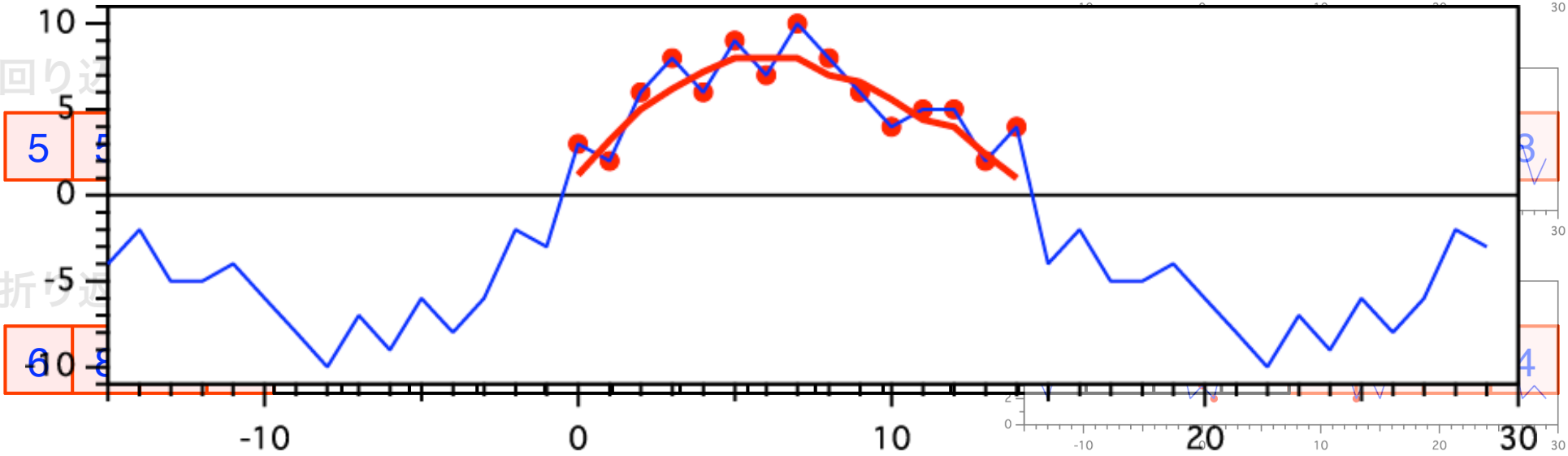
0終端 (zero fill)



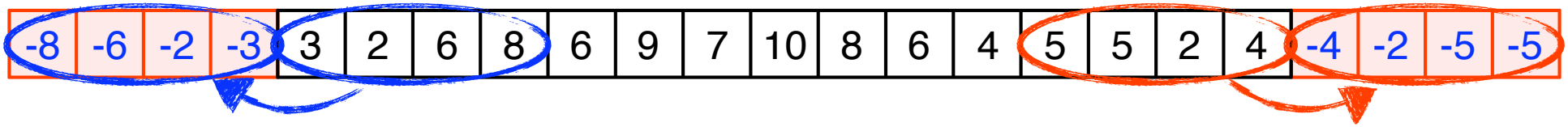
繰り返し終端 (repeat)



回り込み



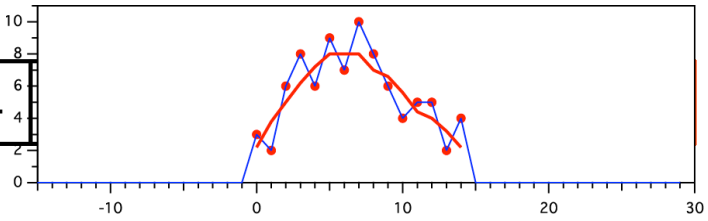
折り返し終端[奇関数=点対象] (bounce, odd)



終端処理(信号の周期化)の方法

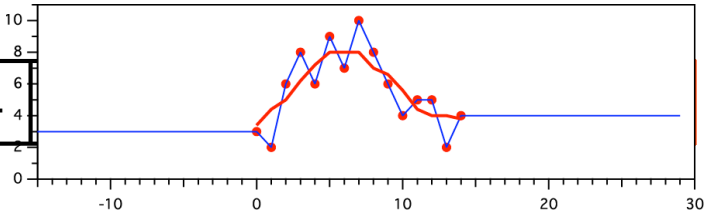
0終端 (zero fill)

0	0	0	0	3	2	6	8	6	9	7	10	8	6	4



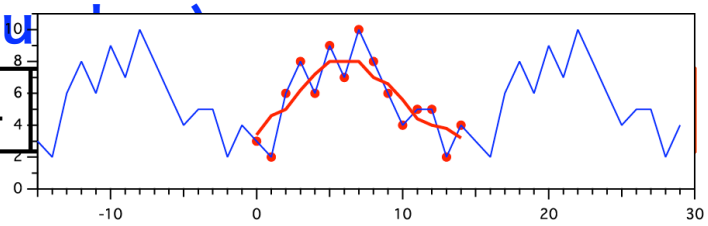
繰り返し終端 (repeat)

3	3	3	3	3	2	6	8	6	9	7	10	8	6	4



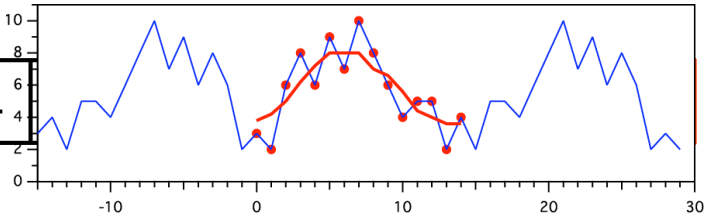
回り込み終端/周期境界 (wrap around/periodic bou

5	5	2	4	3	2	6	8	6	9	7	10	8	6	4



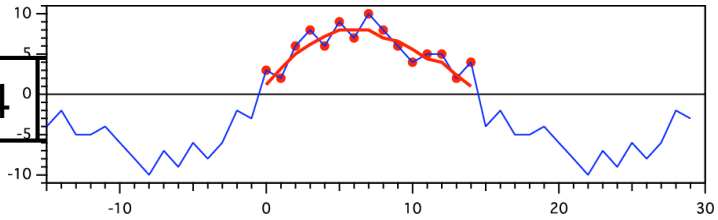
折り返し終端[偶関数=線対象] (bounce, even)

6	8	6	2	3	2	6	8	6	9	7	10	8	6	4



折り返し終端[奇関数=点対象] (bounce, odd)

-8	-6	-2	-3	3	2	6	8	6	9	7	10	8	6	4



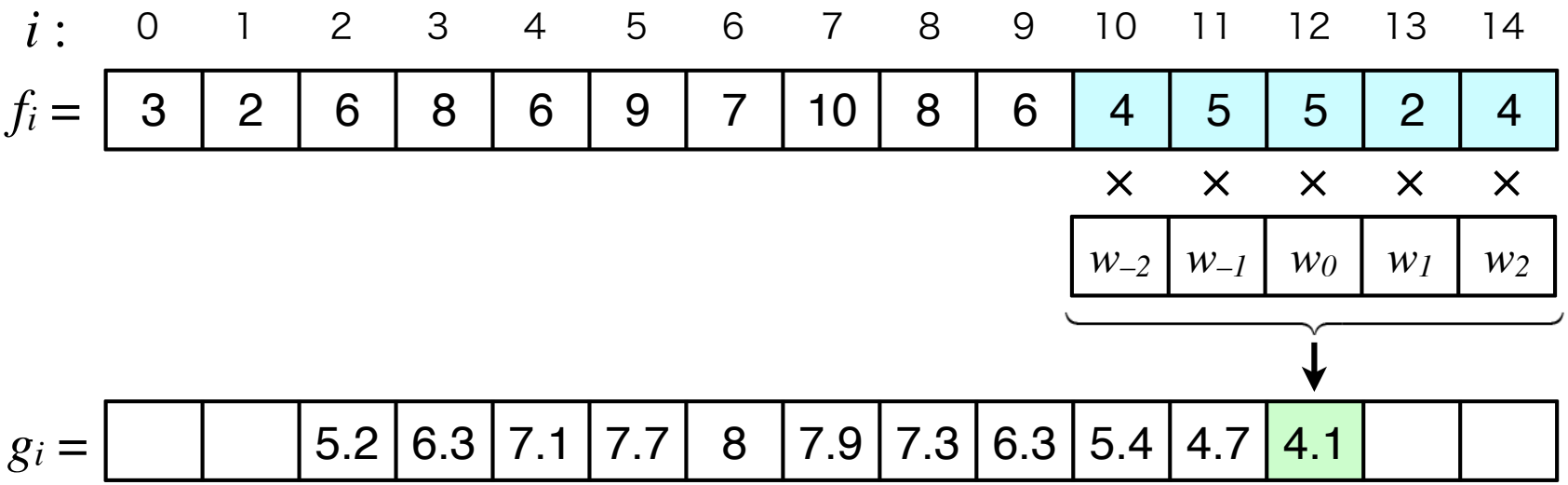
平滑化のアルゴリズム

- 単純移動平均(ボックスフィルタ)
- **ガウシアンフィルタ(加重移動平均)**
- **二項フィルタ(加重移動平均)**
- メジアン(中央値)フィルタ
- 最大値/最小値フィルタ
- Savitzky-Golayフィルタ(多項式)
- ：

加重移動平均アルゴリズム

注目している点の前後の範囲で加重平均を行う

以下の15(=N)個のデータに対して、前後2(=K)点(計5点)の平均をとる場合



$$g_i = \sum_{j=-K}^{K} w_j f_{i+j} \qquad \text{ただし、} \sum_{j=-K}^{K} w_j = 1$$

w_iの分布： ガウス分布(正規分布) → ガウシアンフィルタ $w_j = A\exp(-j^2/K)$

二項分布 → 二項フィルタ $w_j = A\left({}_{2K+1}\mathrm{C}_{(2K+1)/2+j}\right)$

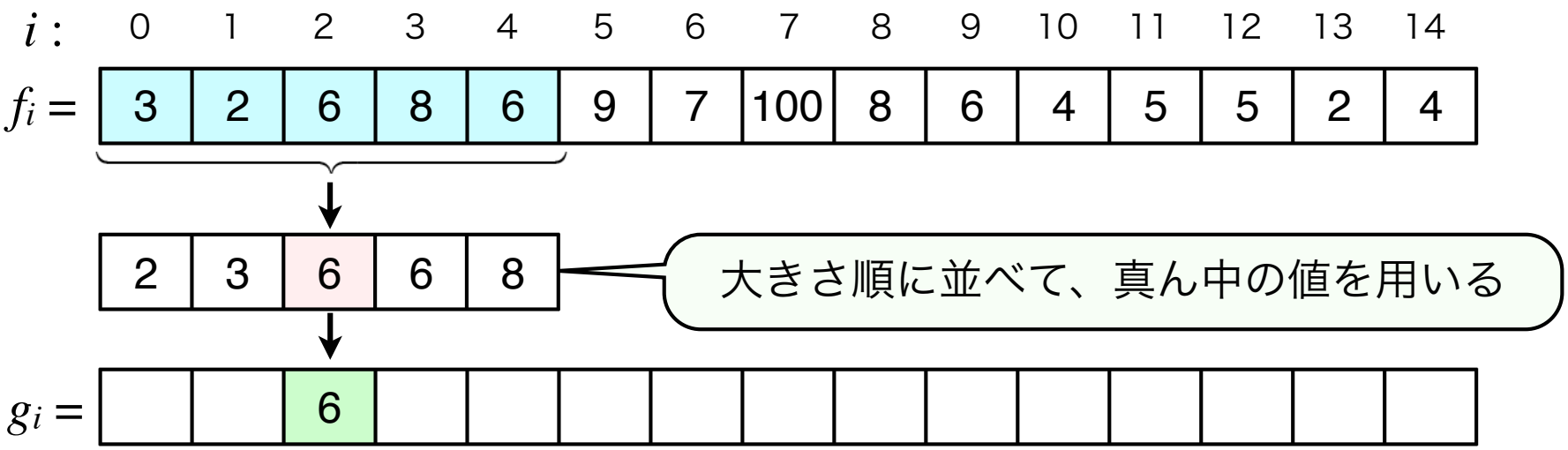
平滑化のアルゴリズム

- 単純移動平均(ボックスフィルタ)
- ガウシアンフィルタ(加重移動平均)
- 二項フィルタ(加重移動平均)
- **メジアン(中央値)フィルタ**
- 最大値/最小値フィルタ
- Savitzky-Golayフィルタ(多項式)
- ：

メジアンフィルタアルゴリズム

注目している点の前後の範囲で中央値(median)を採用する

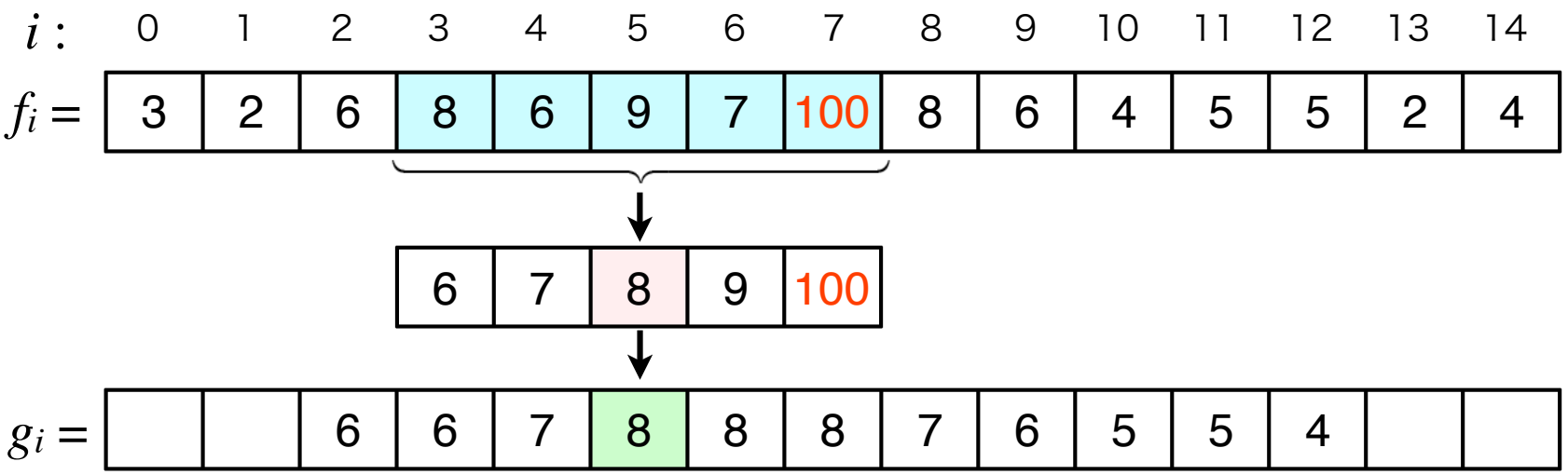
以下の15(=N)個のデータに対して、前後2(=K)点(計5点)で平滑化する場合



メジアンフィルタアルゴリズム

注目している点の前後の範囲で中央値(median)を採用する

以下の15(=N)個のデータに対して、前後2(=K)点(計5点)で平滑化する場合



メジアンフィルタアルゴリズム

注目している点の前後の範囲で中央値(median)を採用する

以下の15(=N)個のデータに対して、前後2(=K)点(計5点)で平滑化する場合

i :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
f_i =	3	2	6	8	6	9	7	100	8	6	4	5	5	2	4

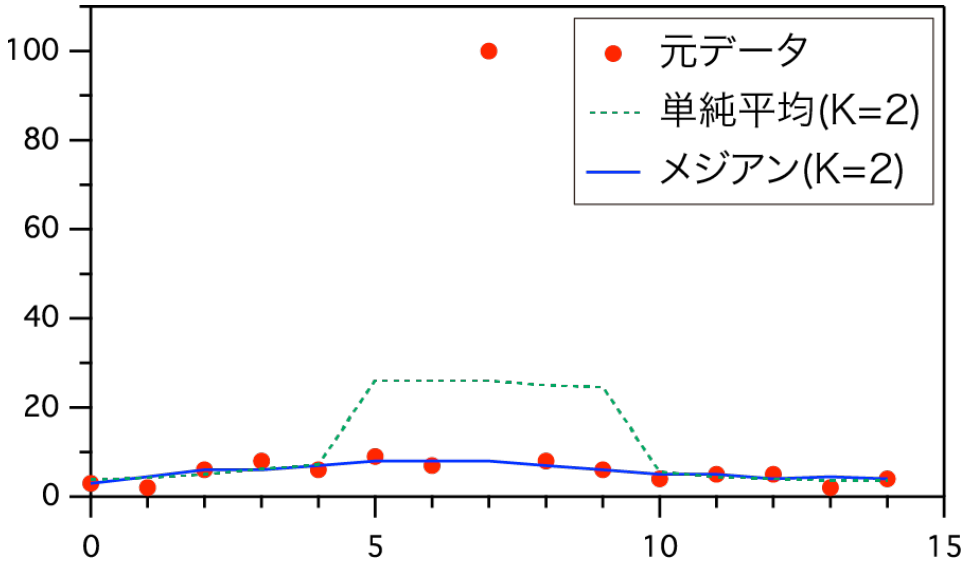
g_i =			6	6	7	8	8	8	7	6	5	5	4		

6 7 8 9 100

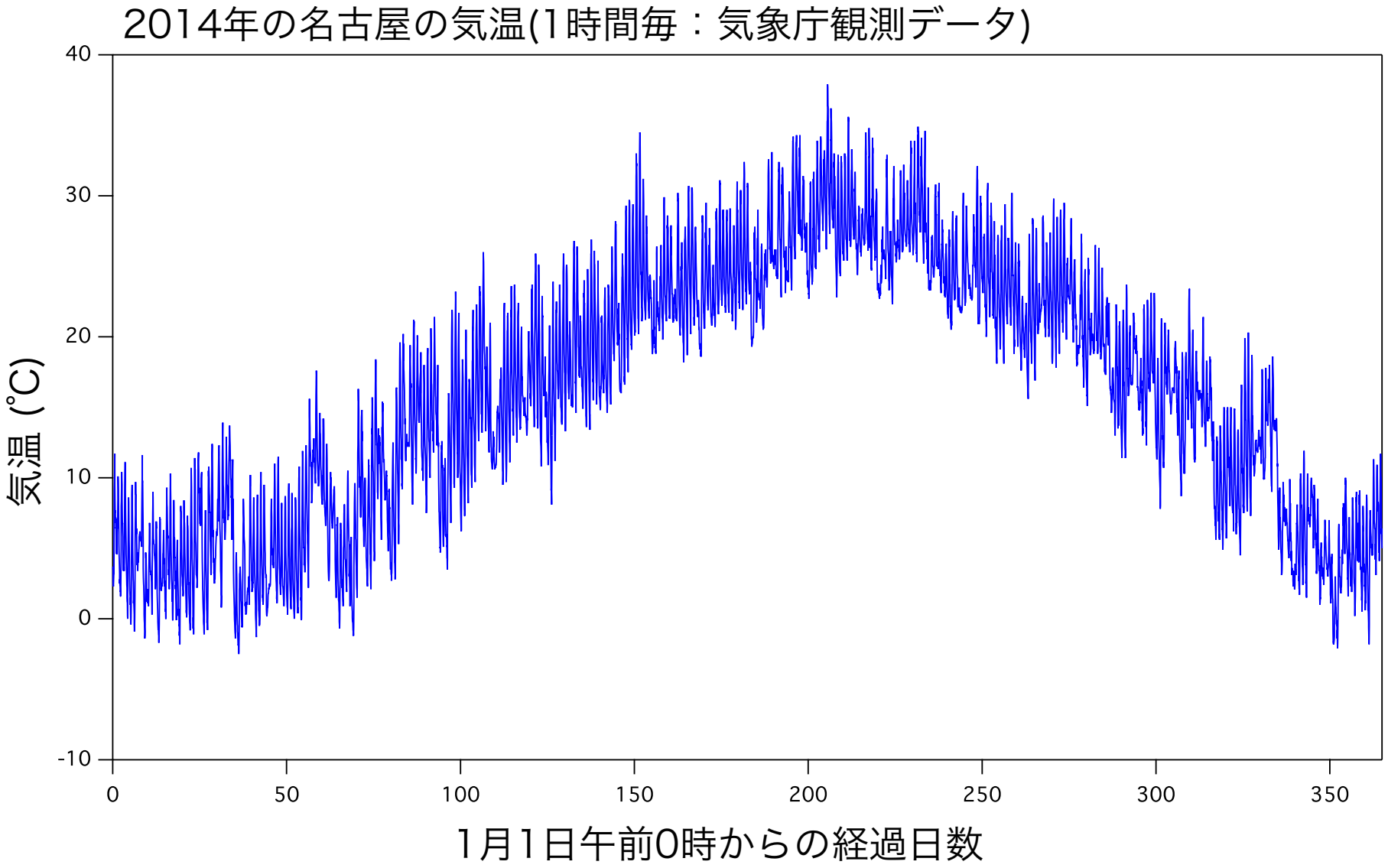
1点だけ異常なデータが入っていても結果に影響を与えない

メジアンフィルタは、局所的なノイズ(ショットノイズ)を効果的に除去できる

ショットノイズは、信号量が非常に少ないとき、宇宙線の影響等で生じることが多い

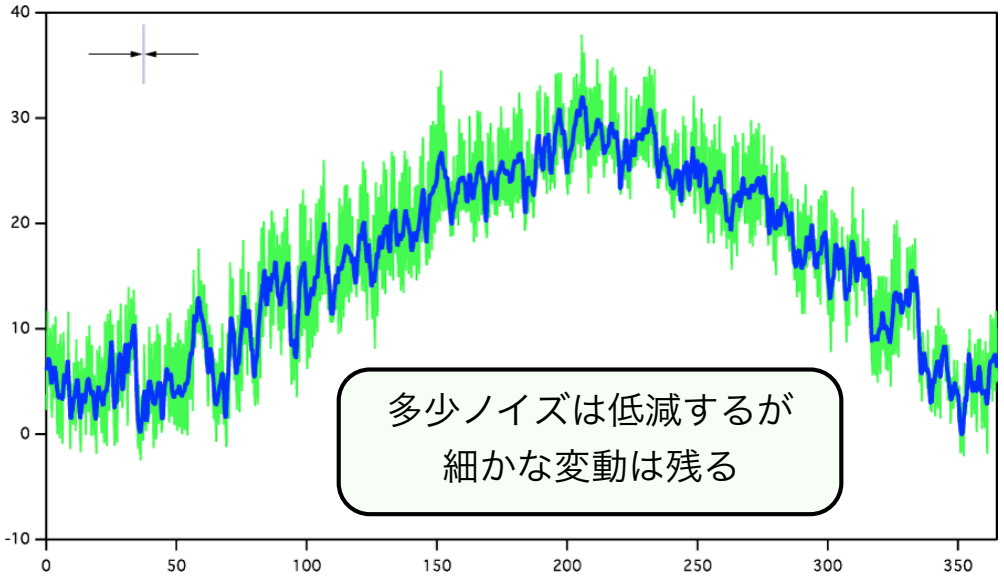


平滑化を気温データに適応してみる

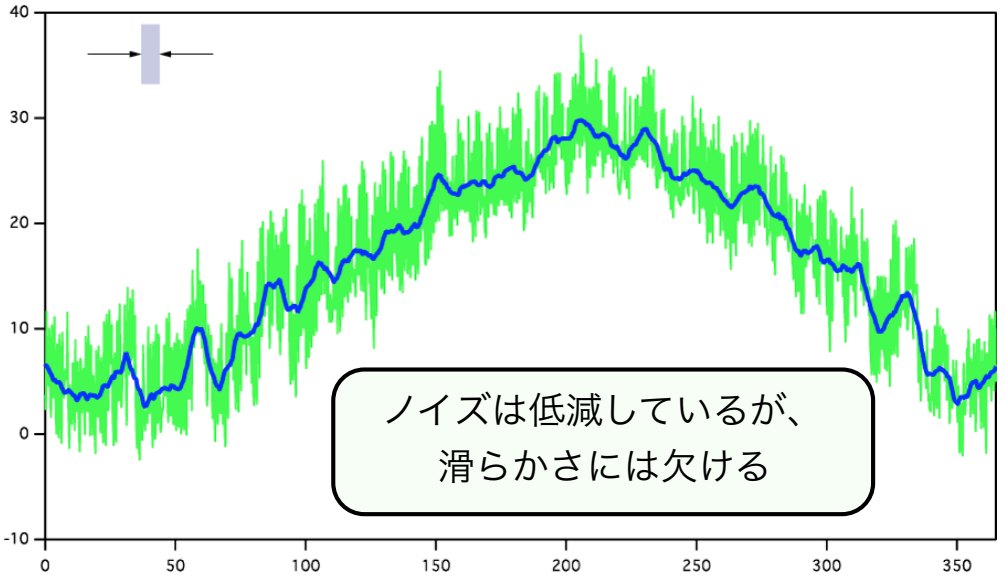


フィルタサイズを変えてみる

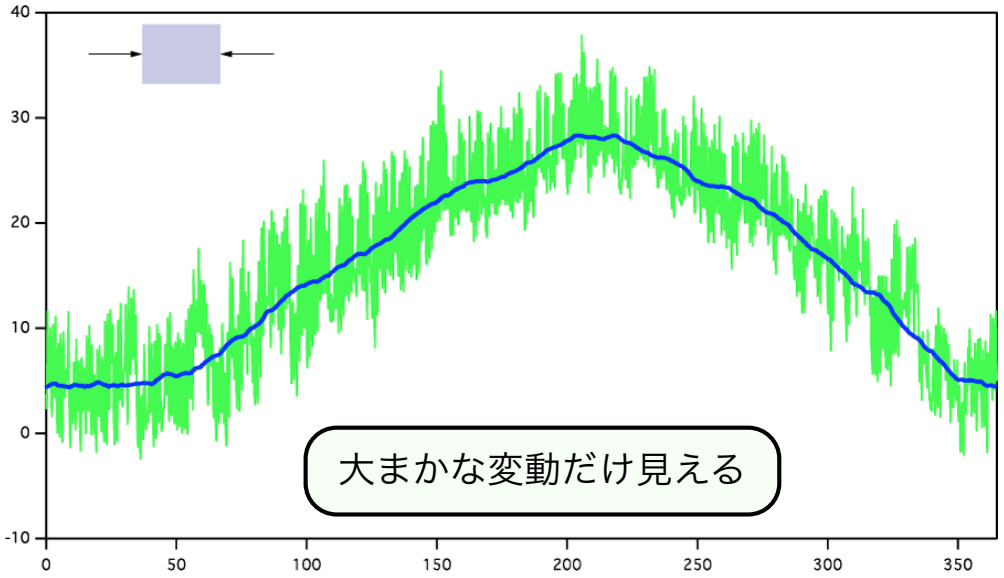
単純移動平均フィルタ：2K+1=1日



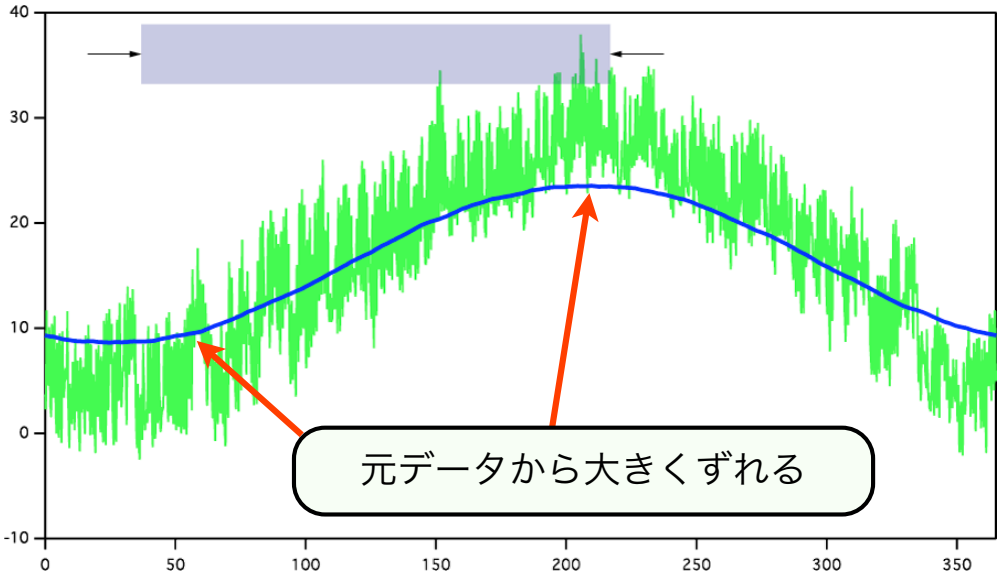
単純移動平均フィルタ：2K+1=7日



単純移動平均フィルタ：2K+1=30日

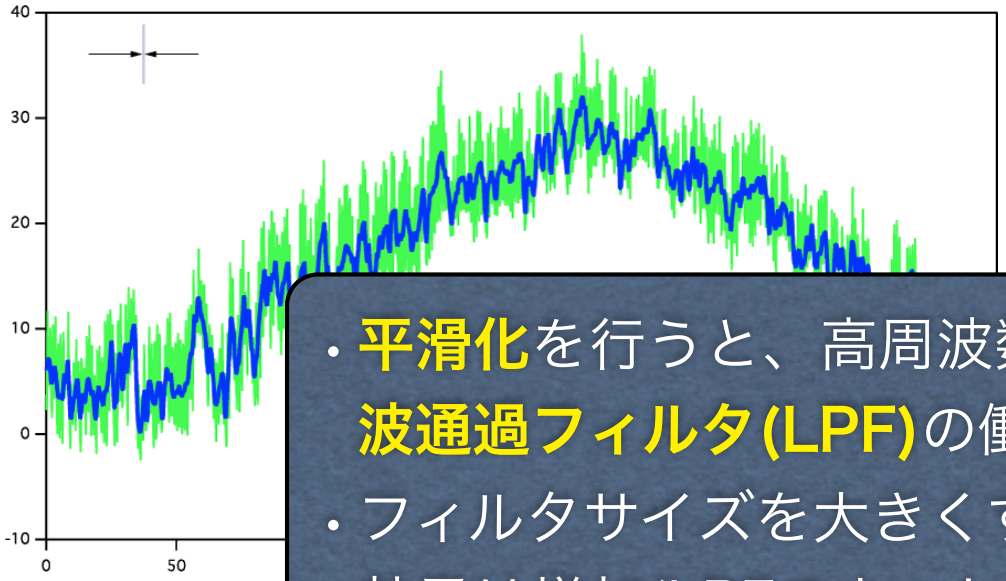


単純移動平均フィルタ：2K+1=180日

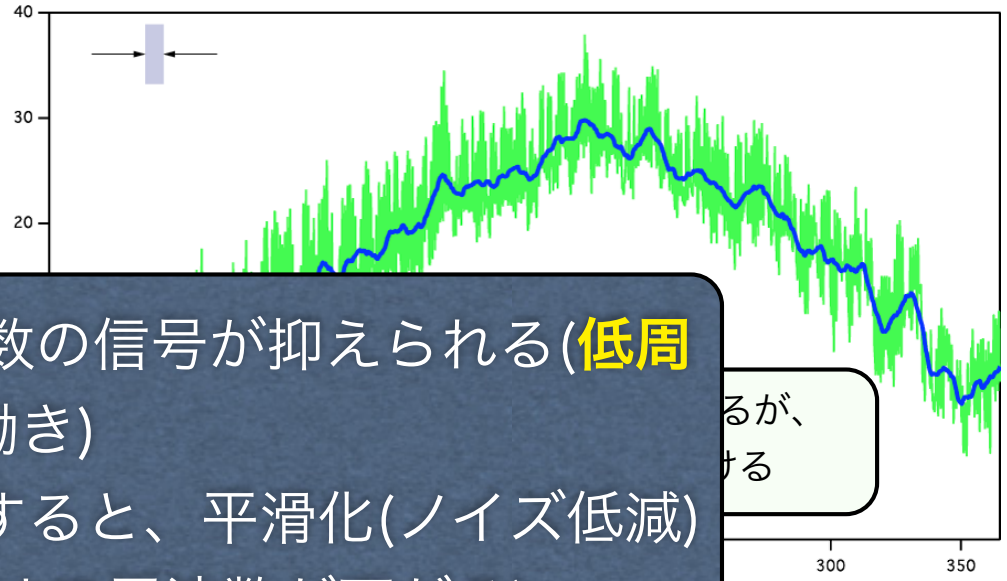


フィルタサイズを変えてみる

単純移動平均フィルタ：2K+1=1日



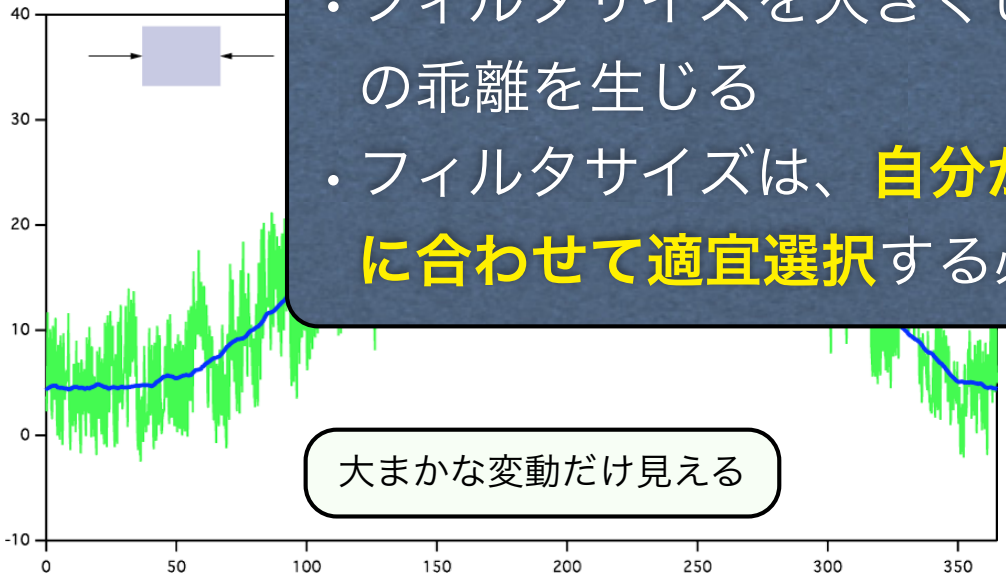
単純移動平均フィルタ：2K+1=7日



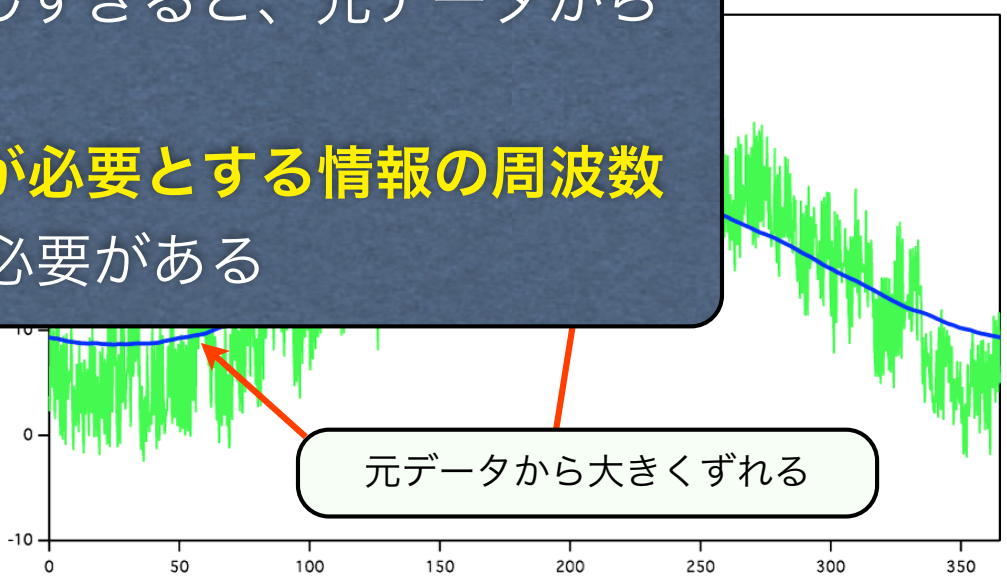
るが、
する

単純移動

1=180日



大まかな変動だけ見える

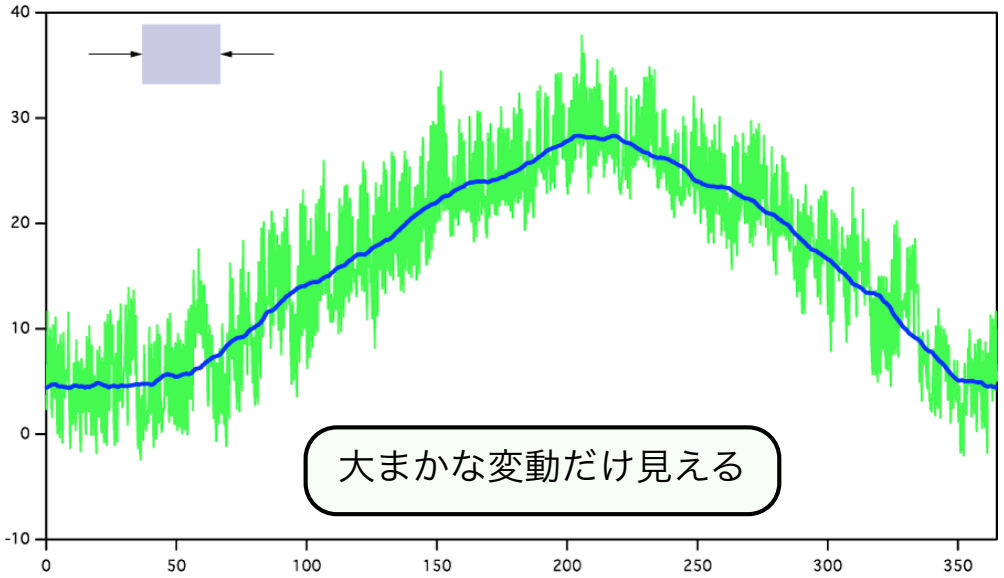


元データから大きくずれる

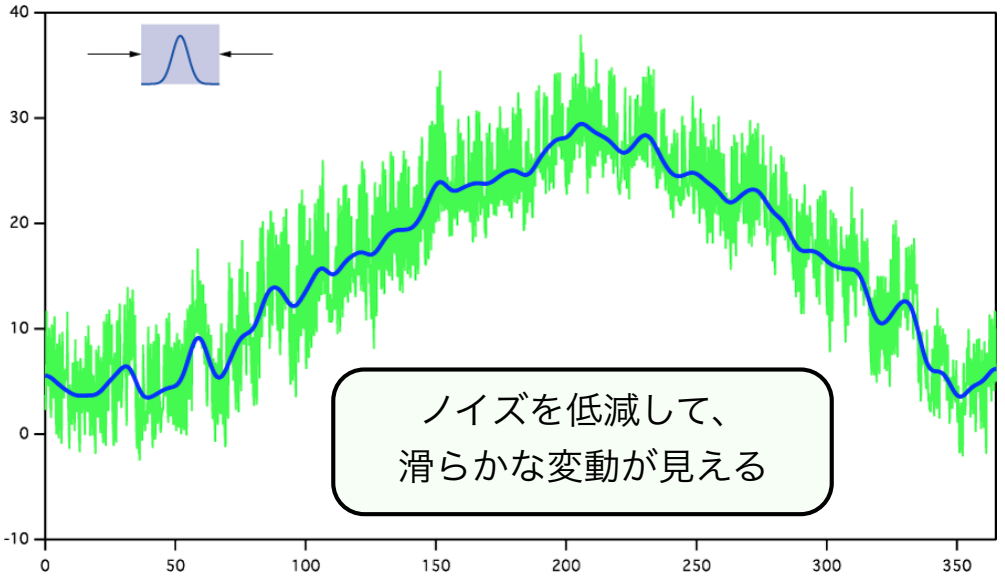
- **平滑化**を行うと、高周波数の信号が抑えられる(**低周波通過フィルタ(LPF)**の働き)
- フィルタサイズを大きくすると、平滑化(ノイズ低減)効果は増加(LPFのカットオフ周波数が下がる)
- フィルタサイズを大きくしすぎると、元データからの乖離を生じる
- フィルタサイズは、**自分が必要とする情報の周波数に合わせて適宜選択**する必要がある

フィルタの種類を変えてみる

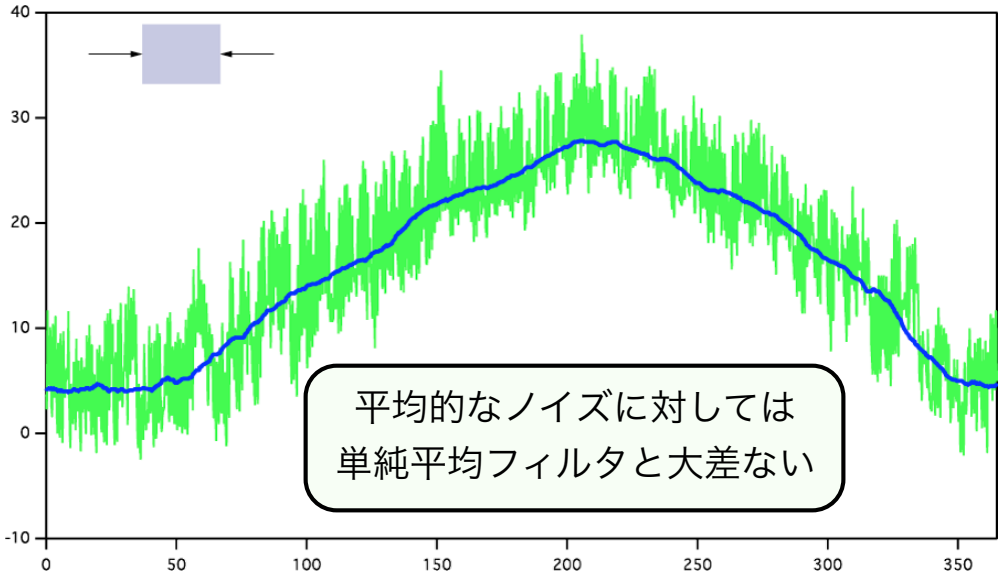
単純移動平均フィルタ：2K+1=30日



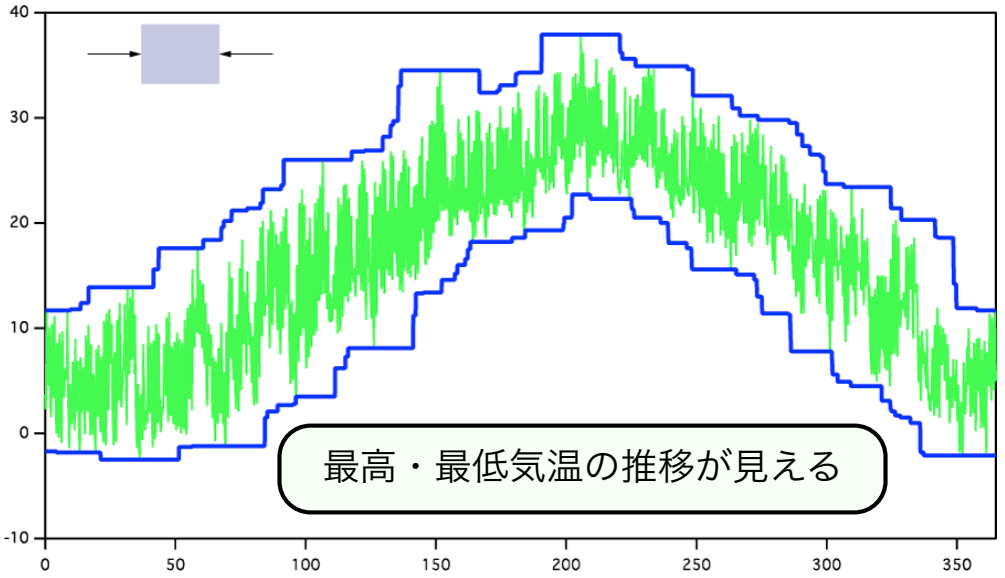
ガウシアンフィルタ：2K+1=30日



メジアンフィルタ：2K+1=30日

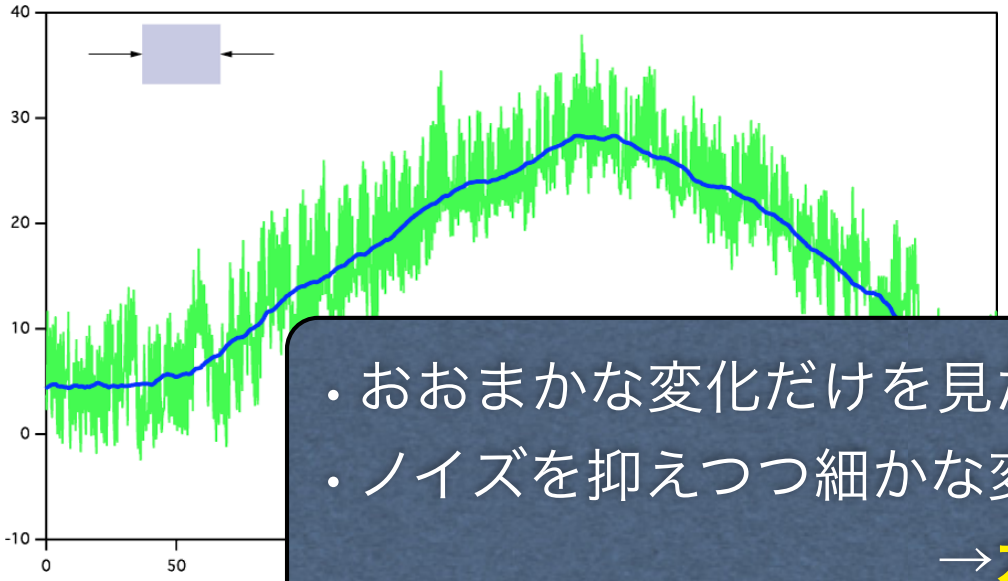


最大・最小フィルタ：2K+1=30日

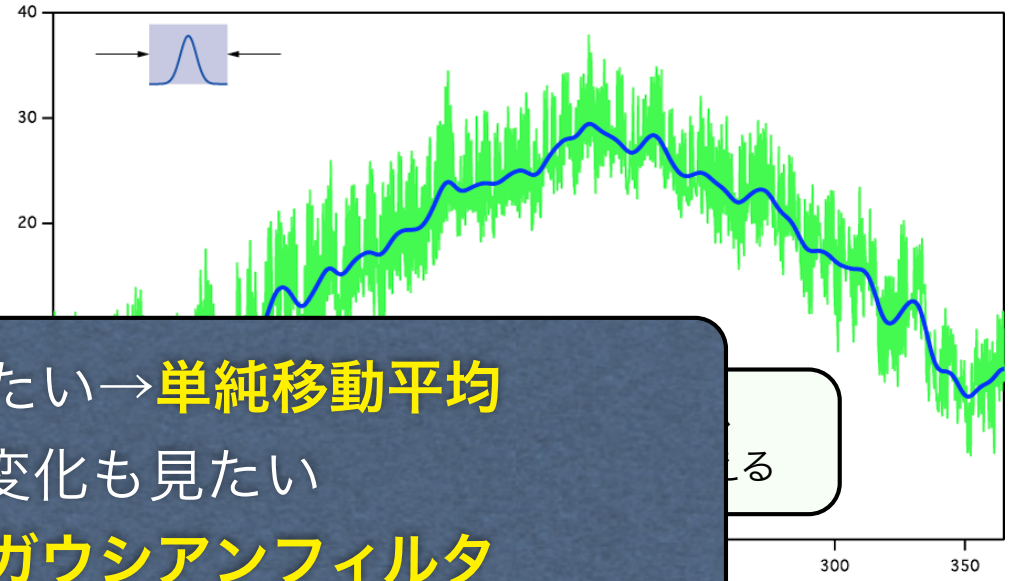


フィルタの種類を変えてみる

単純移動平均フィルタ：2K+1=30日

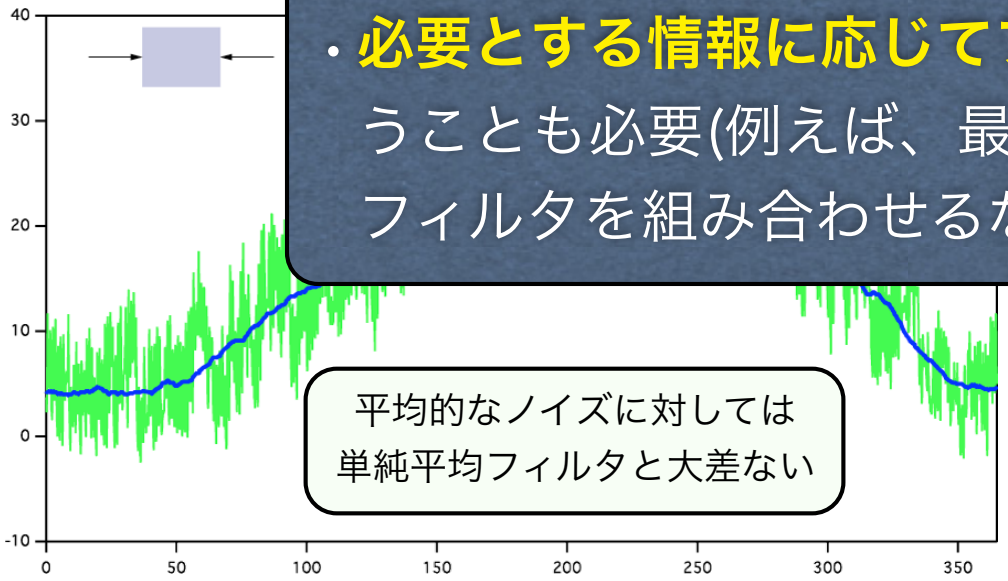


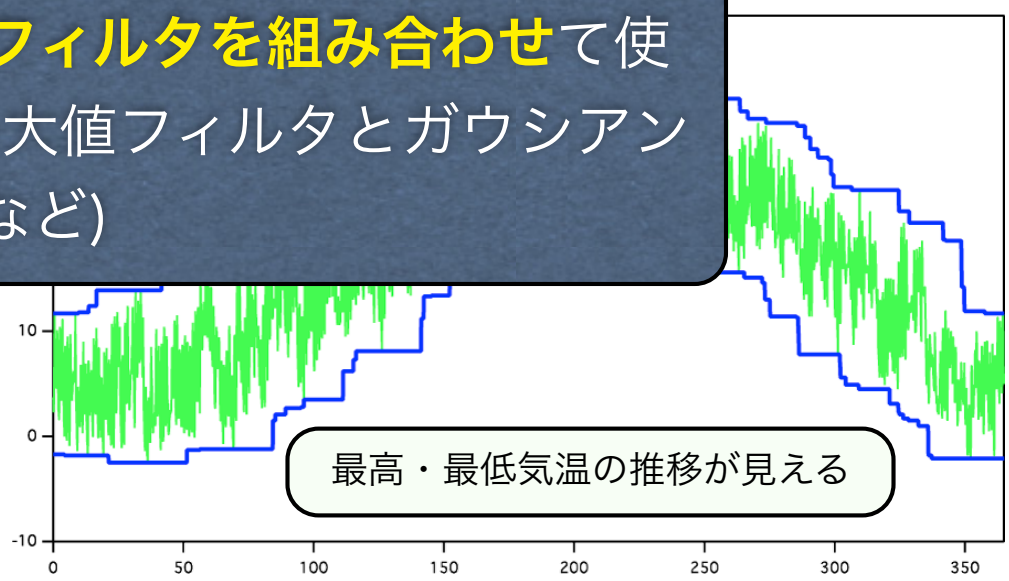
ガウシアンフィルタ：2K+1=30日



- おおまかな変化だけを見たい→**単純移動平均**
- ノイズを抑えつつ細かな変化も見たい
  →**ガウシアンフィルタ**
- ショットノイズを抑えたい→**メジアンフィルタ**
- **必要とする情報に応じてフィルタを組み合わせ**て使うことも必要(例えば、最大値フィルタとガウシアンフィルタを組み合わせるなど)

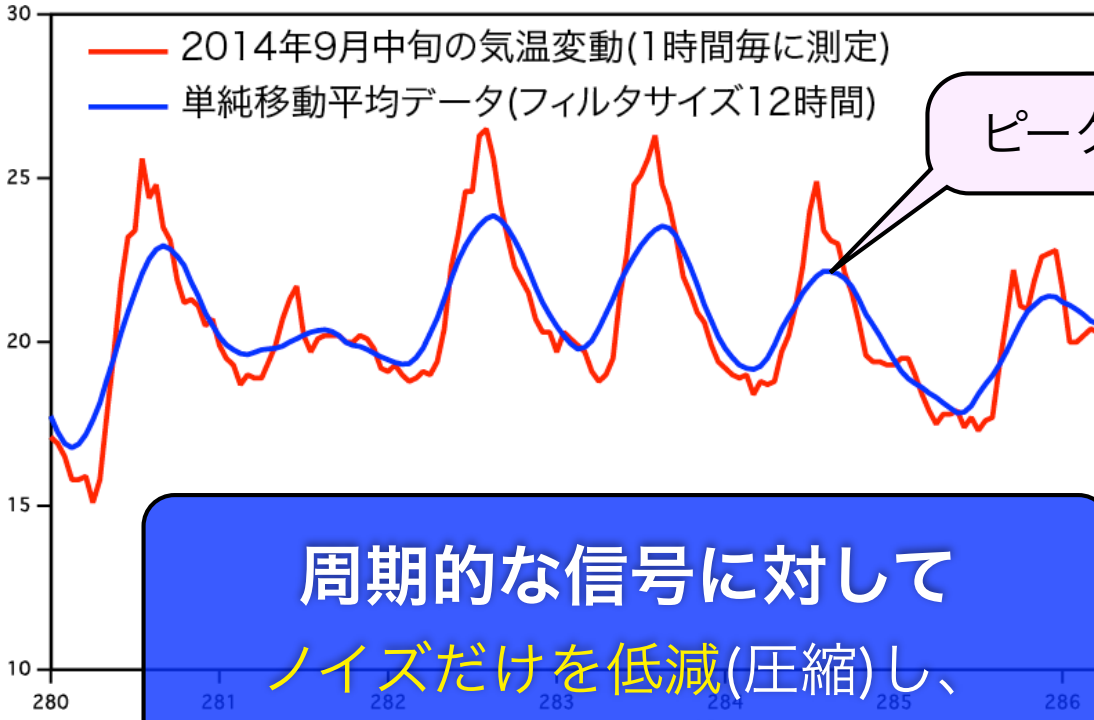
メジア





同期加算(ノイズの圧縮)

平滑化を行うと、ノイズは低減するが、
ノイズと同時に信号強度も低減する



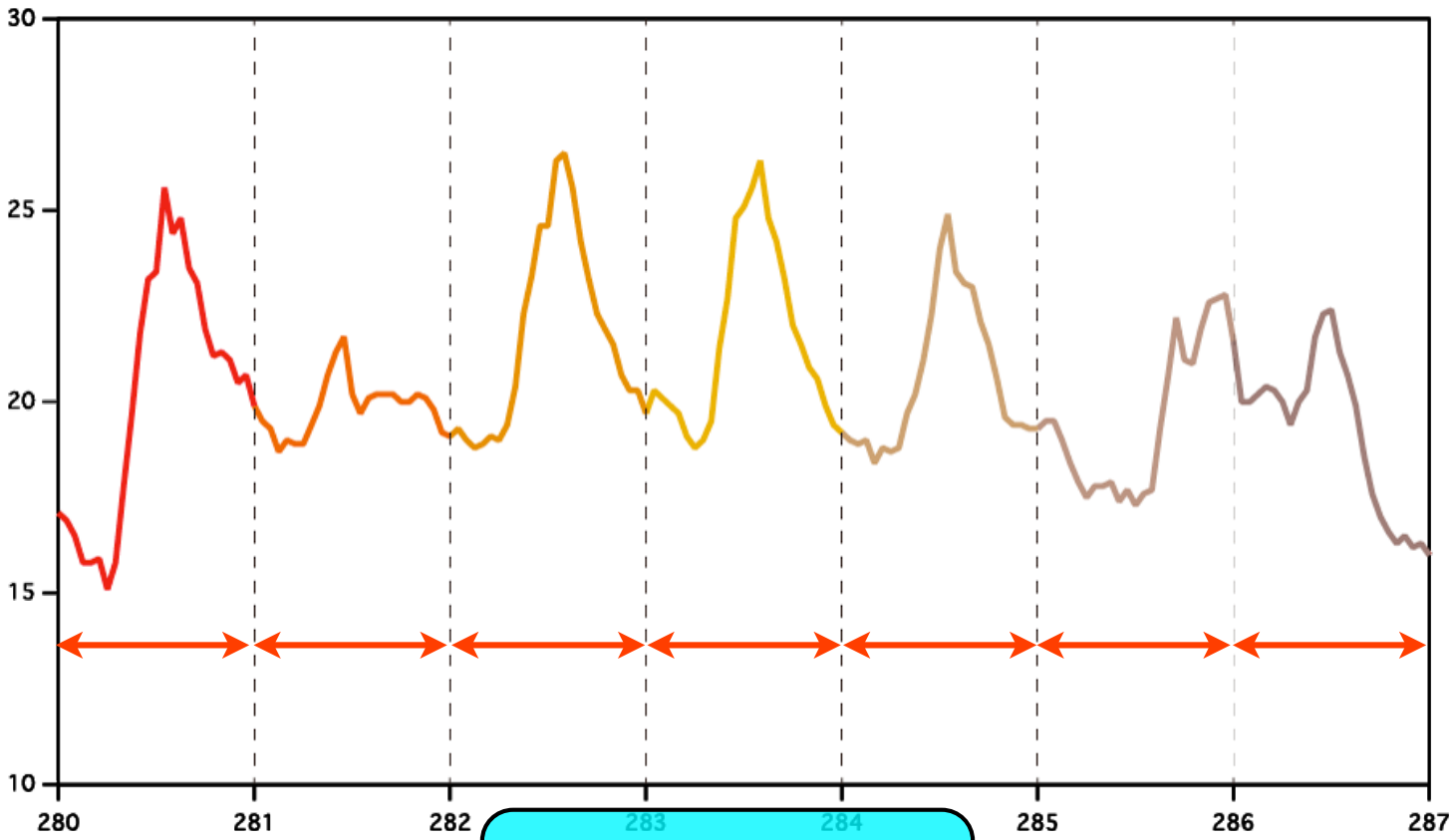
ピーク温度がつぶれている

ノイズは減るが真の信号(気温の周期変動)は復活しない

周期的な信号に対して
ノイズだけを低減(圧縮)し、
つぶれた信号も復活させる
→ **同期加算(平均応答)**

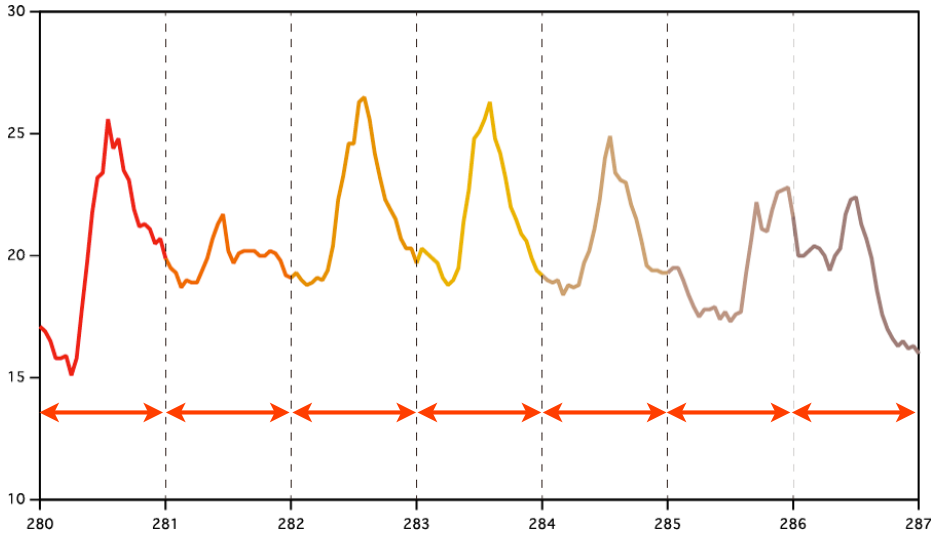
同期加算アルゴリズム

ノイズを含む周期的な信号



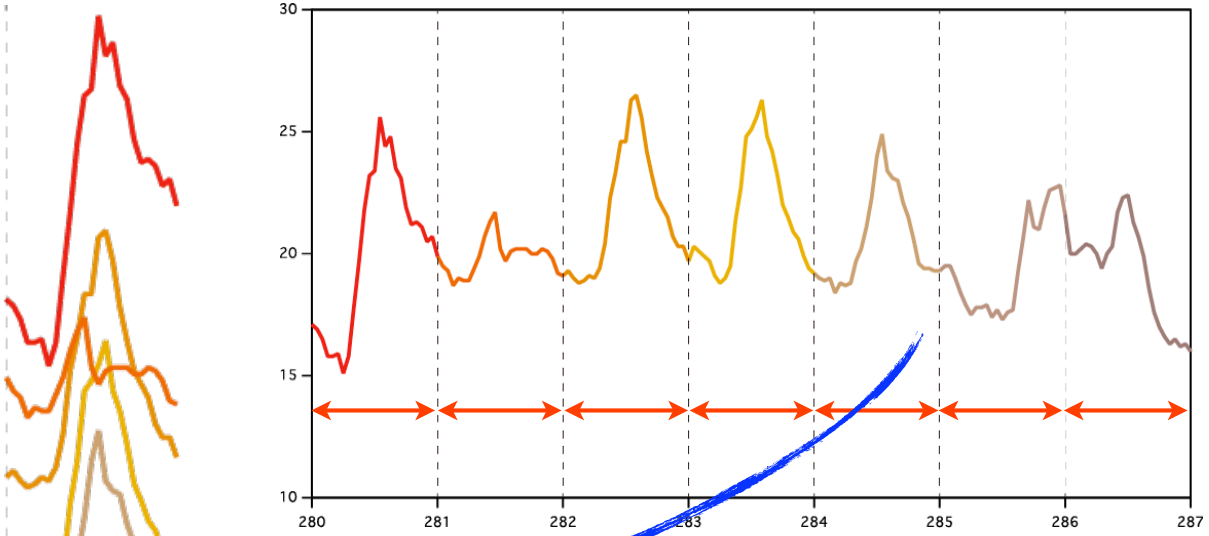
等間隔に切り出す

同期加算アルゴリズム



等間隔に切り出す

同期加算アルゴリズム

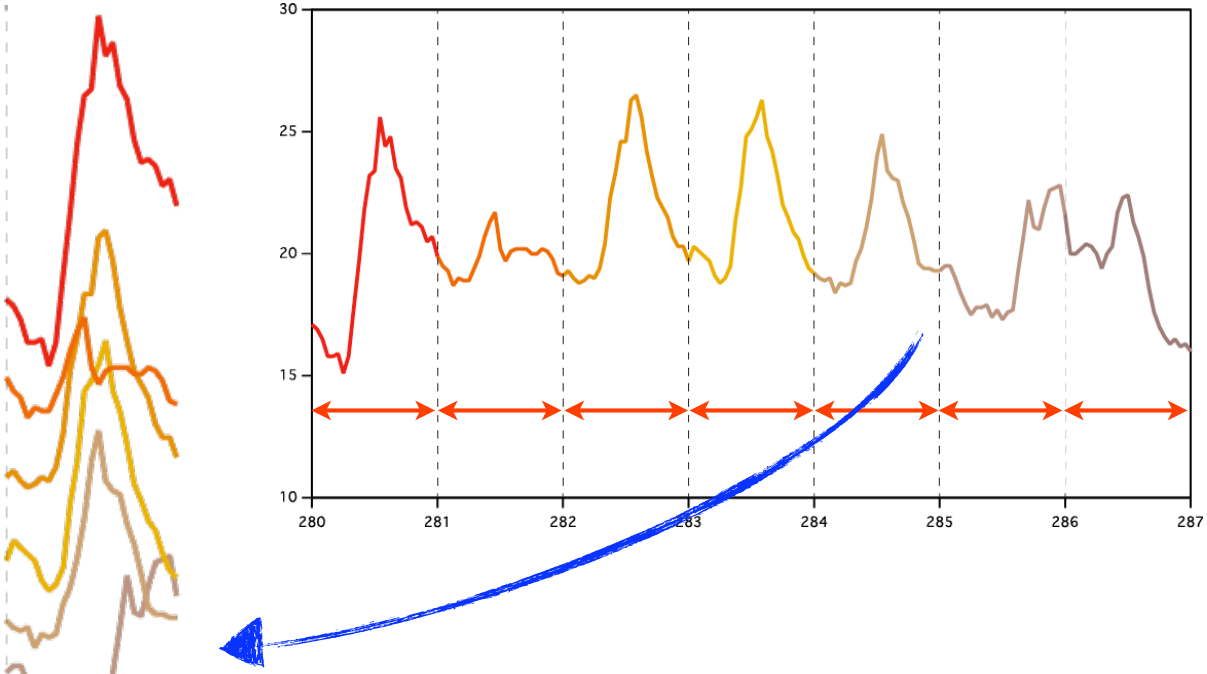


等間隔に切り出す

同期を取る

始点を揃えて並べる
(同期を取る)

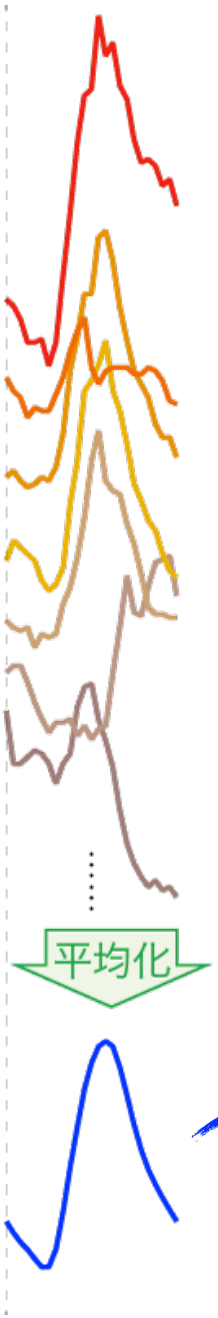
同期加算アルゴリズム

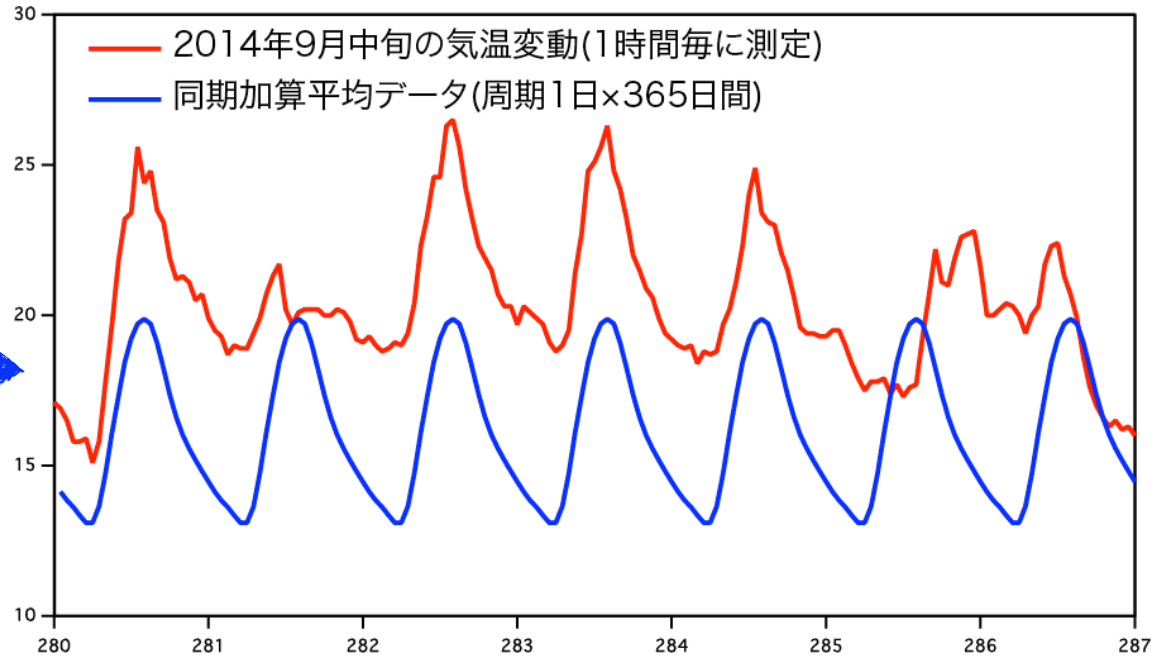


等間隔に切り出す

同期を取る

平均を取る





同期加算の原理(数学的に)

$$f_i(t) = s_i(t) + n_i(t)$$

測定した信号 (*i*番目の周期)

真の信号 (周期変化) $= s(t)$

ノイズ (ランダム変化)

*N*周期分を加算平均すると...

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\{s(t) + n_i(t)\} = s(t) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_i(t)$$

*s(t)*を*N*回足して*N*で割る

ランダムな信号を無限回加算すると0

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} n_i(t) = 0$$

十分な回数(*N*→∞)加算平均すると...

$$\overline{f(t)} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i(t) = s(t)$$

ノイズだけが消えて(圧縮されて)
信号はそのまま残る

第3章 数学の準備体操

教科書 pp27–50

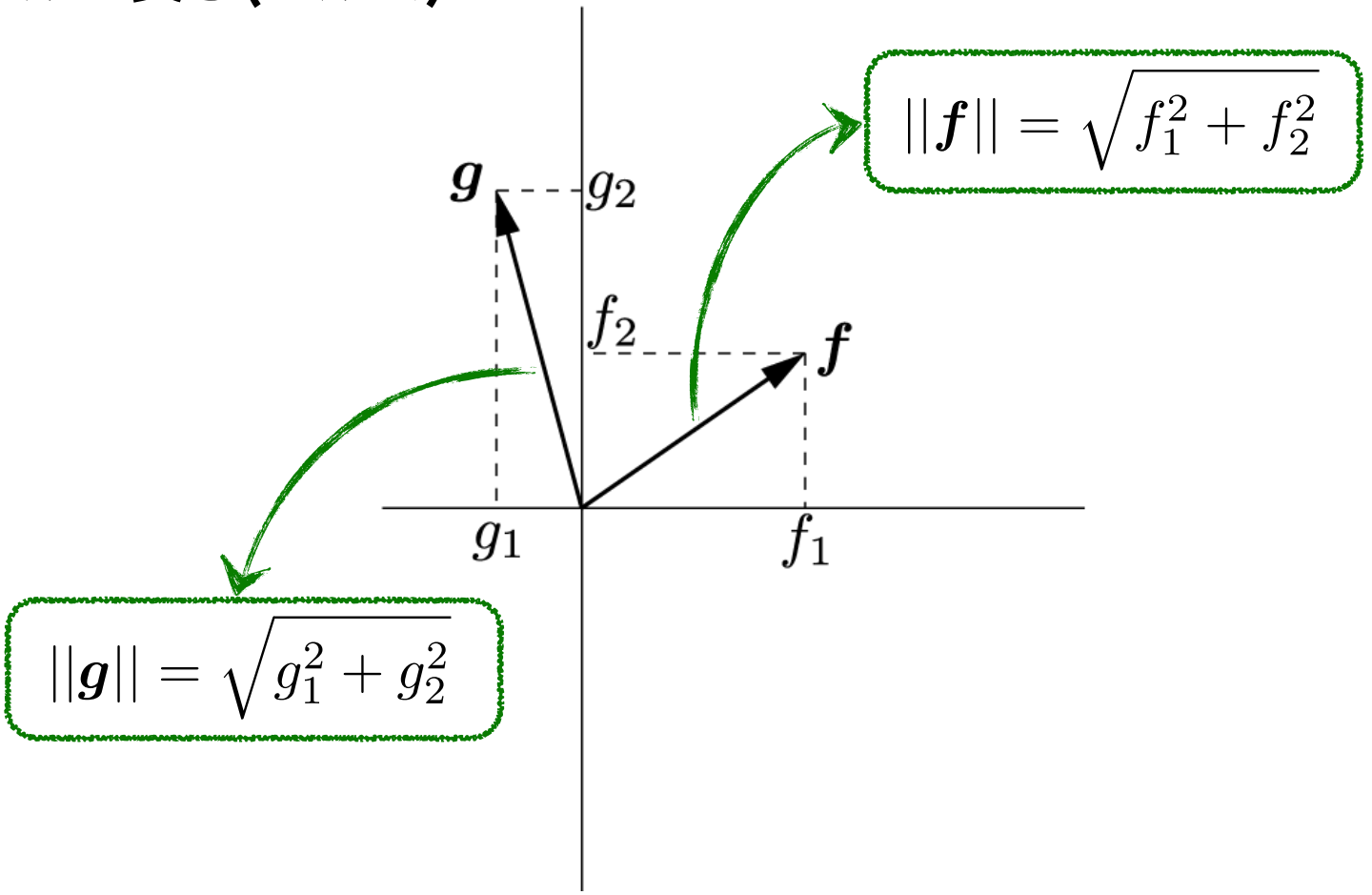
- ベクトルの復習
- 相関係数
- 正規直交基
- 多次元ベクトルへの拡張
- 関数空間への拡張
- 正規直交関数系

ベクトルの復習

ベクトル：方向と長さを持つ値

まず、2次元(平面内の)ベクトルを考える： $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$， $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2)$

- **ベクトルの長さ(ノルム)**

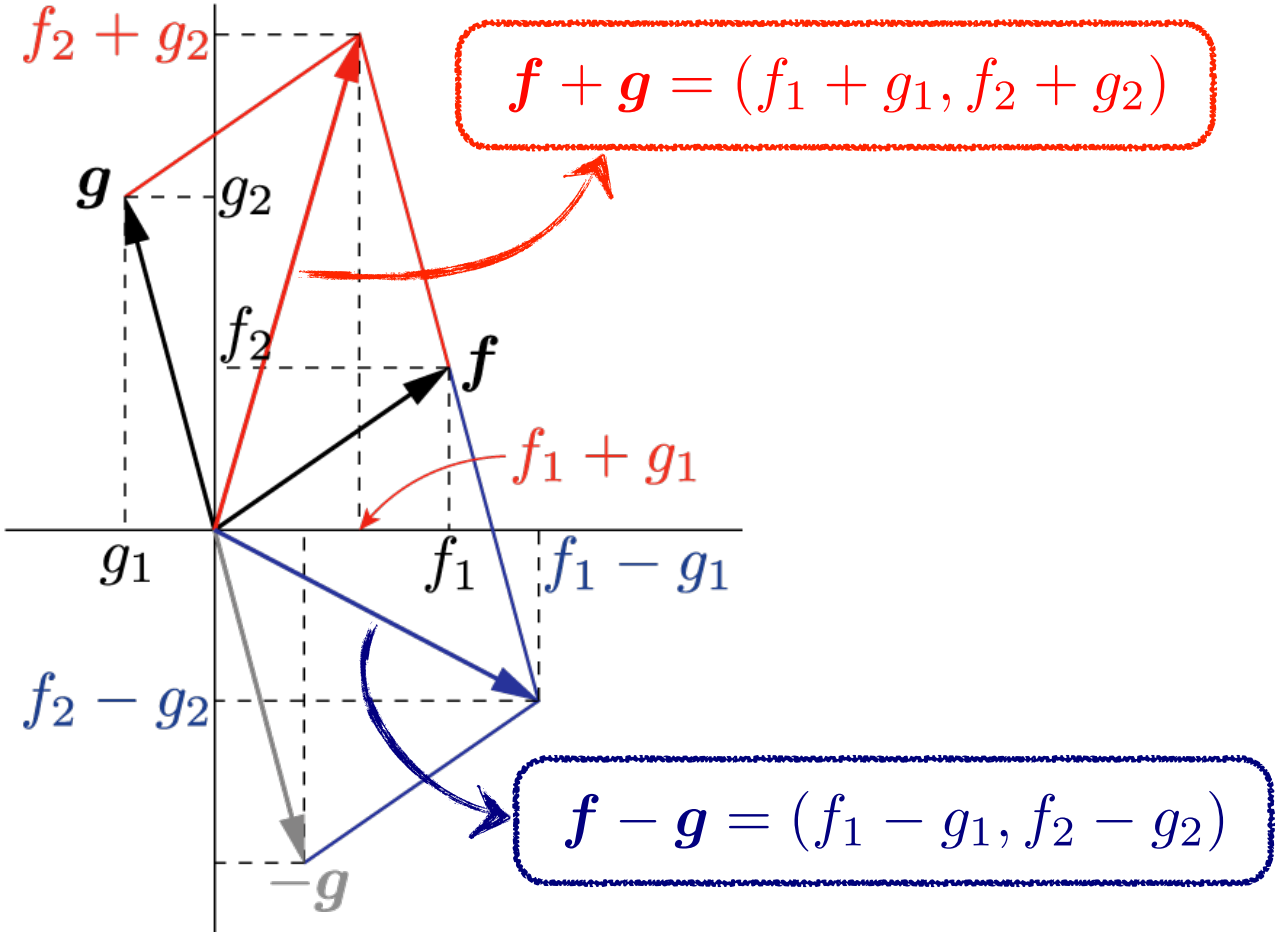


ベクトルの復習

ベクトル：方向と長さを持つ値

まず、2次元(平面内の)ベクトルを考える： $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$， $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2)$

- **ベクトルの加減算**



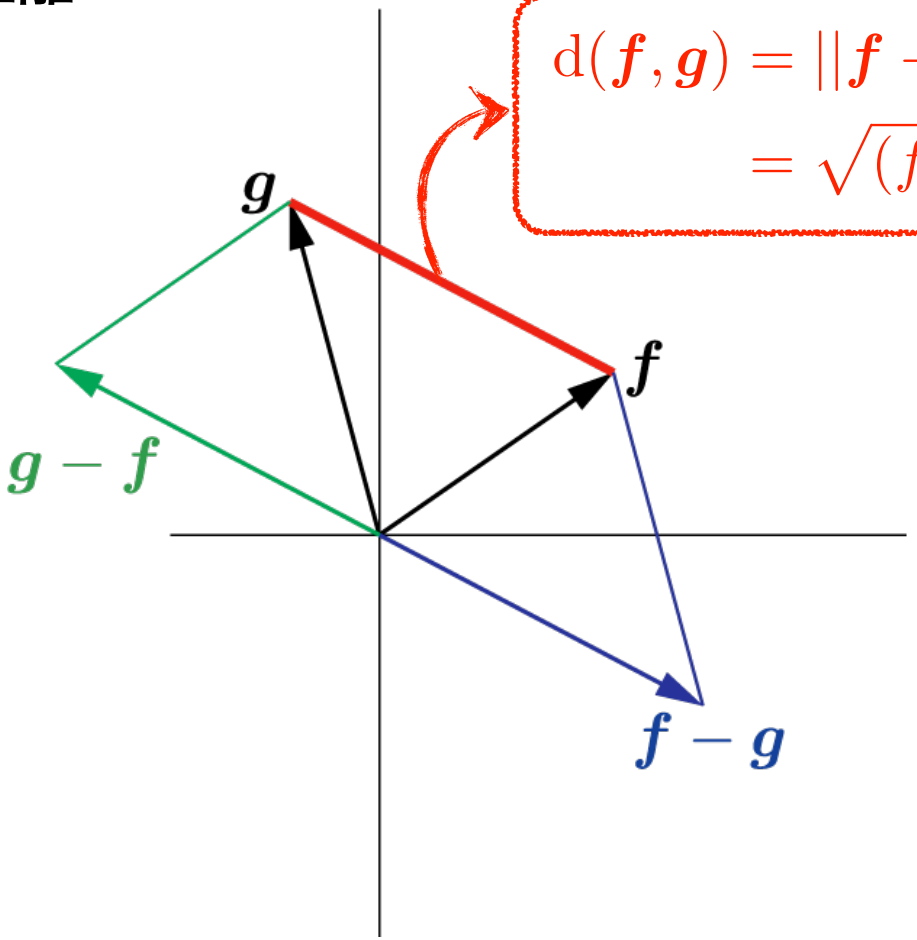
ベクトルの復習

ベクトル：方向と長さを持つ値

まず、2次元(平面内の)ベクトルを考える： $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$， $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2)$

- **ベクトル間の距離**

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) = ||\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}|| = ||\boldsymbol{g} - \boldsymbol{f}||$$
$$= \sqrt{(f_1 - g_1)^2 + (f_2 - g_2)^2}$$

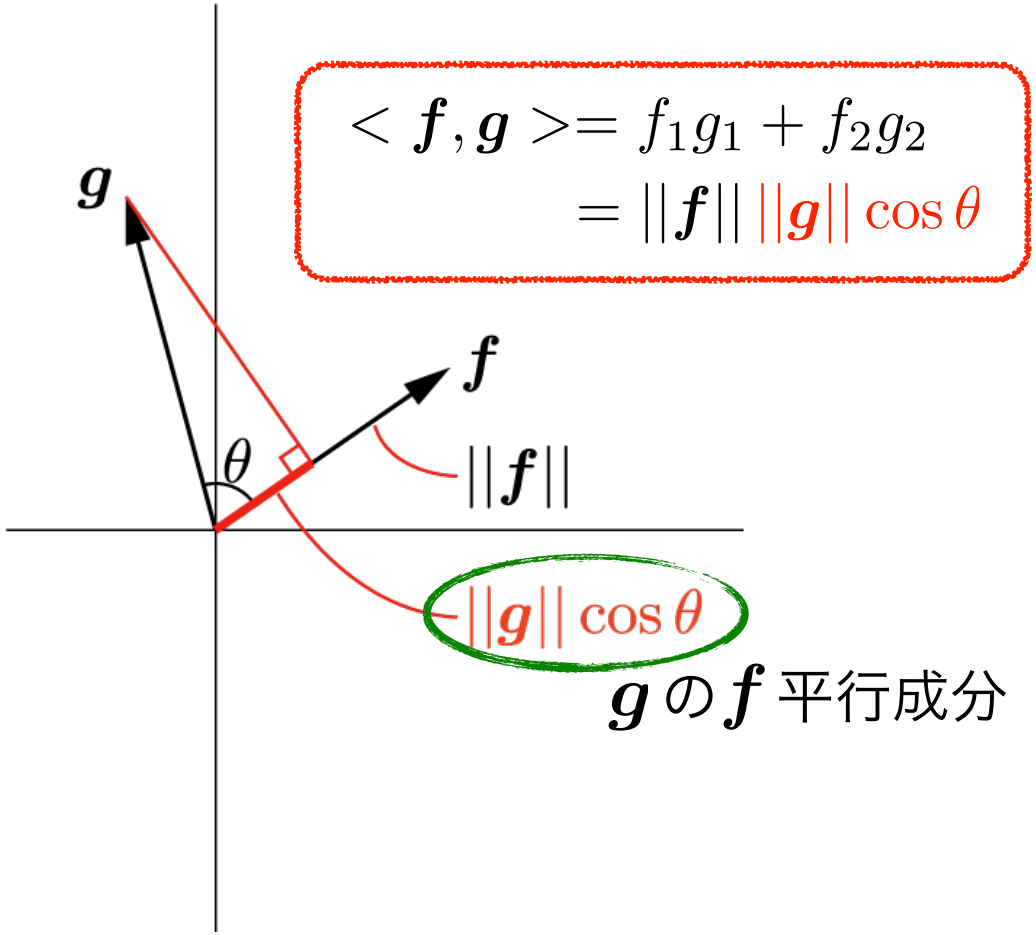


ベクトルの復習

ベクトル：方向と長さを持つ値

まず、2次元(平面内の)ベクトルを考える： $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$， $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2)$

- **ベクトルの内積とベクトル間の角度**



ベクトルの復習

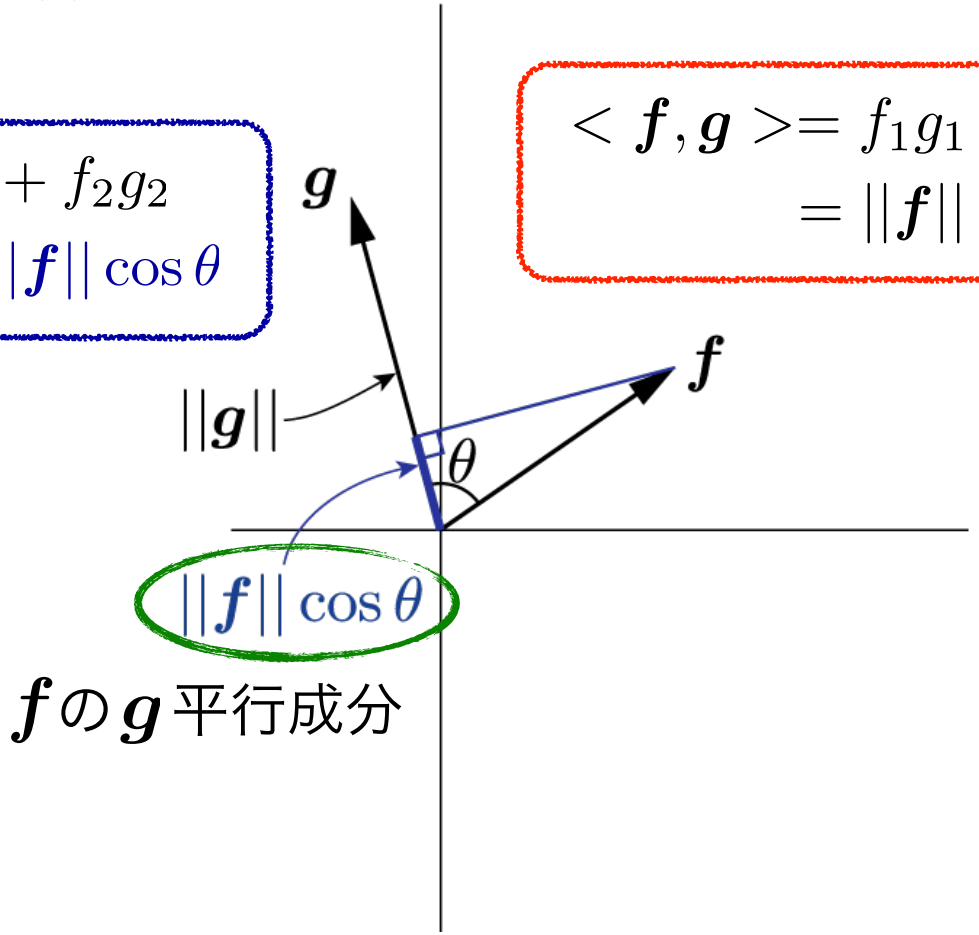
ベクトル：方向と長さを持つ値

まず、2次元(平面内の)ベクトルを考える： $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$， $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2)$

- **ベクトルの内積とベクトル間の角度**

$$< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} >= f_1 g_1 + f_2 g_2 = ||\boldsymbol{g}||\,||\boldsymbol{f}||\cos\theta$$

$$< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} >= f_1 g_1 + f_2 g_2 = ||\boldsymbol{f}||\,||\boldsymbol{g}||\cos\theta$$



$\boldsymbol{f}$の$\boldsymbol{g}$平行成分

ベクトルの復習

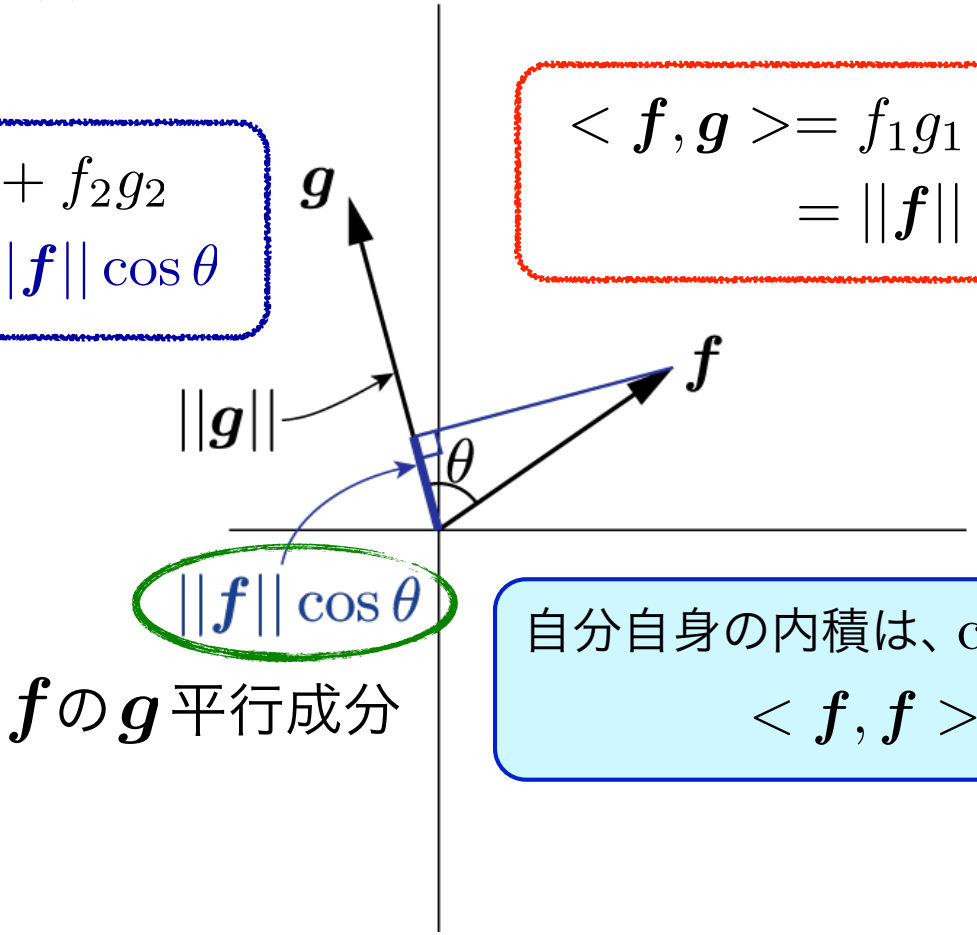
ベクトル：方向と長さを持つ値

まず、2次元(平面内の)ベクトルを考える： $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$， $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2)$

- **ベクトルの内積とベクトル間の角度**

$$< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} >= f_1 g_1 + f_2 g_2 = ||\boldsymbol{g}||\,||\boldsymbol{f}||\cos\theta$$

$$< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} >= f_1 g_1 + f_2 g_2 = ||\boldsymbol{f}||\,||\boldsymbol{g}||\cos\theta$$



$\boldsymbol{f}$の$\boldsymbol{g}$平行成分

自分自身の内積は、$\cos\theta = 1$ なので、

$$< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f} >= ||\boldsymbol{f}||^2$$

ベクトルの復習

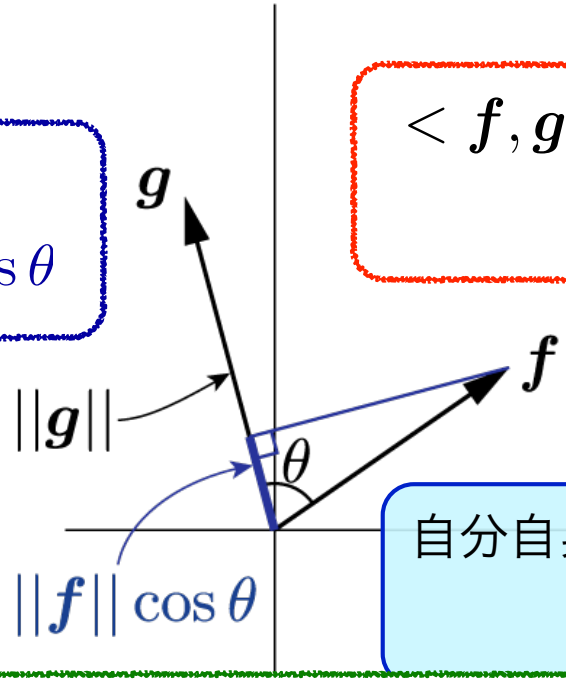
ベクトル：方向と長さを持つ値

まず、2次元(平面内の)ベクトルを考える： $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$， $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2)$

- **ベクトルの内積とベクトル間の角度**

$$< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} >= f_1 g_1 + f_2 g_2 = ||\boldsymbol{g}||\,||\boldsymbol{f}||\cos\theta$$

$$< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} >= f_1 g_1 + f_2 g_2 = ||\boldsymbol{f}||\,||\boldsymbol{g}||\cos\theta$$



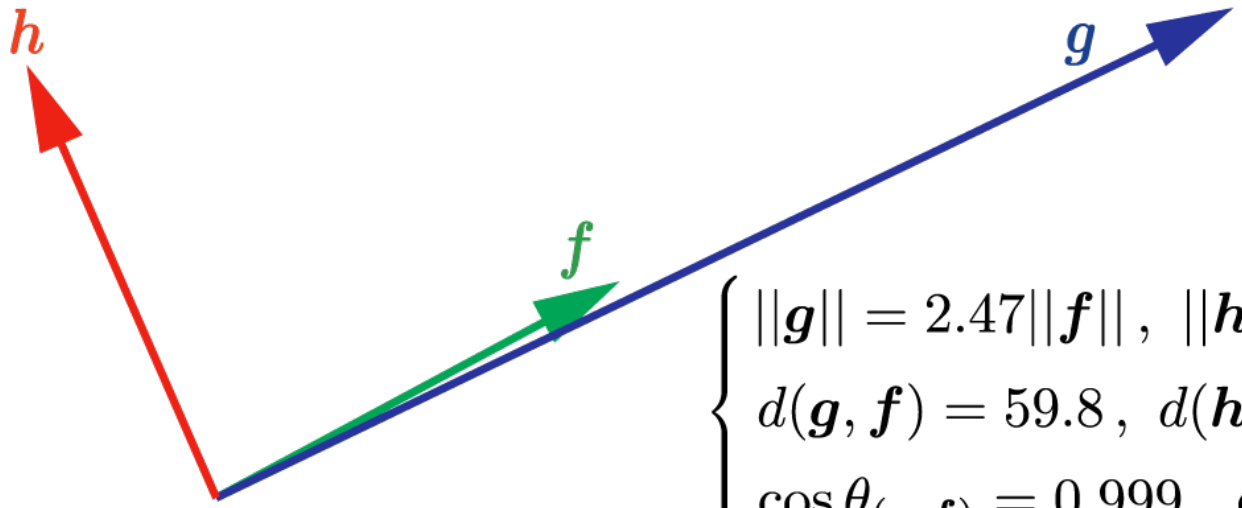
自分自身の内積は、$\cos\theta = 1$ なので、

$$< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f} >= ||\boldsymbol{f}||^2$$

$$\cos\theta = \frac{< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} >}{||\boldsymbol{f}||\,||\boldsymbol{g}||} \begin{cases} \cos\theta = 0 : \theta = 90^\circ & \rightarrow \text{直交} \\ \cos\theta = 1 : \theta = 0^\circ & \rightarrow \text{平行} \\ \cos\theta = -1 : \theta = 180^\circ & \rightarrow \text{反平行} \end{cases}$$

ベクトルの類似性

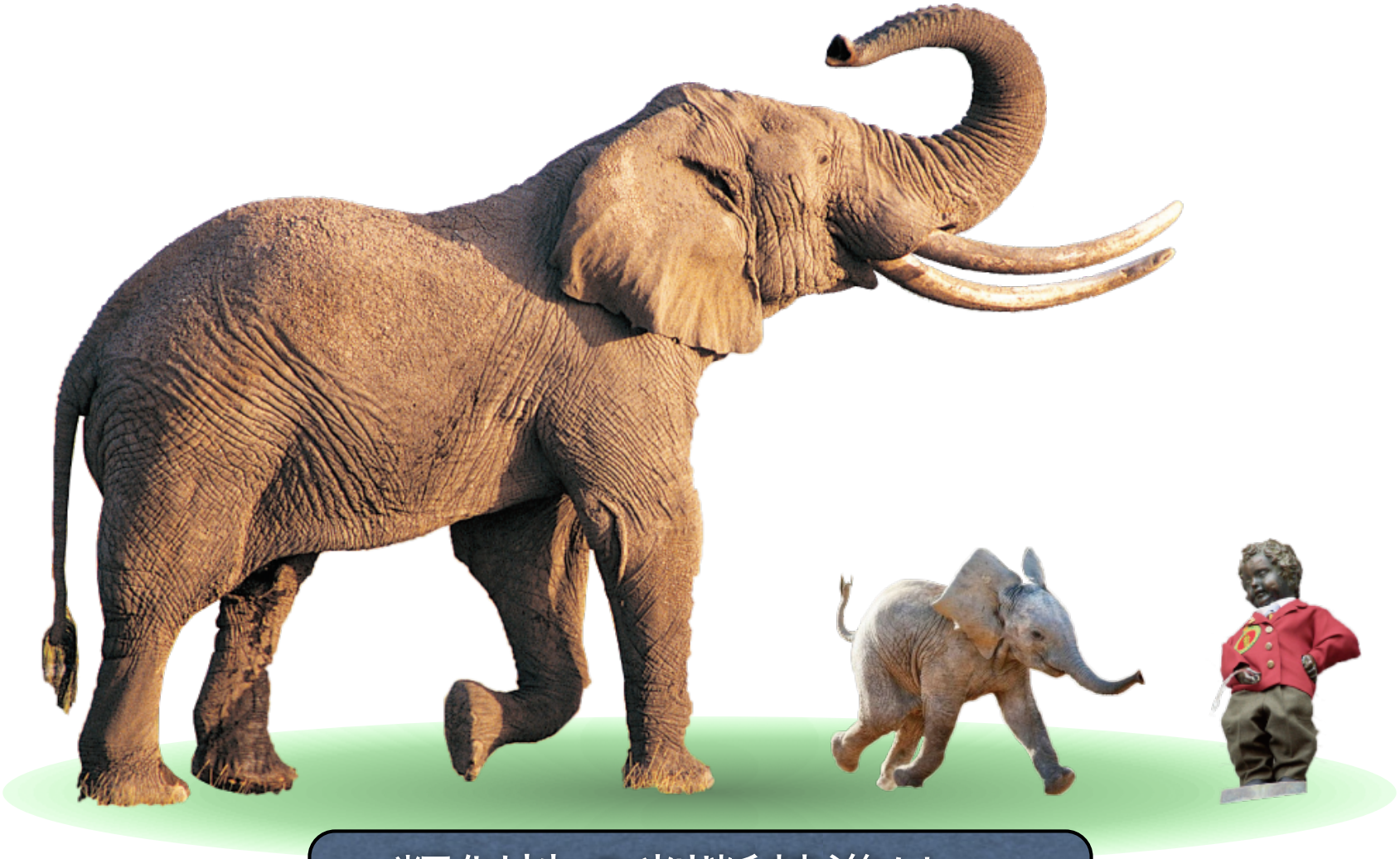
$\boldsymbol{f}$ に似ているのは、$\boldsymbol{g}$？それとも $\boldsymbol{h}$？



$$\begin{cases} ||\boldsymbol{g}|| = 2.47||\boldsymbol{f}||\,,\ ||\boldsymbol{h}|| = 1.03||\boldsymbol{f}|| \\ d(\boldsymbol{g},\boldsymbol{f}) = 59.8\,,\ d(\boldsymbol{h},\boldsymbol{f}) = 56.2 \\ \cos\theta_{(\boldsymbol{g},\boldsymbol{f})} = 0.999\,,\ \cos\theta_{(\boldsymbol{h},\boldsymbol{f})} = 0.079 \end{cases}$$

ベクトルの類似性

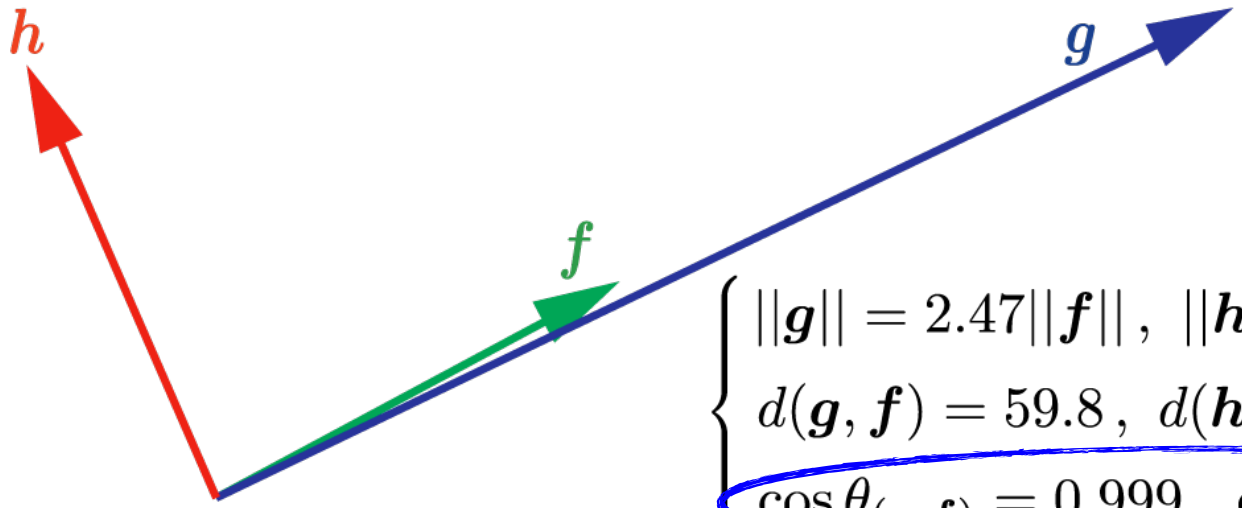
「子象」に似ているのは、「小僧」？それとも「親象」？



類似性の判断基準は、
大小よりも方向性が重要

ベクトルの類似性

$\boldsymbol{f}$ に似ているのは、$\boldsymbol{g}$？それとも $\boldsymbol{h}$？



$$\begin{cases} ||\boldsymbol{g}|| = 2.47||\boldsymbol{f}||\,,\ ||\boldsymbol{h}|| = 1.03||\boldsymbol{f}|| \\ d(\boldsymbol{g},\boldsymbol{f}) = 59.8\,,\ d(\boldsymbol{h},\boldsymbol{f}) = 56.2 \\ \cos\theta_{(\boldsymbol{g},\boldsymbol{f})} = 0.999\,,\ \cos\theta_{(\boldsymbol{h},\boldsymbol{f})} = 0.079 \end{cases}$$

類似性の判断基準は、
大小よりも方向性が重要

⇒ $\boldsymbol{f}$ に近いのは $\boldsymbol{g}$

相関係数

$$r = \cos\theta = \frac{<\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}>}{||\boldsymbol{f}||\,||\boldsymbol{g}||}$$

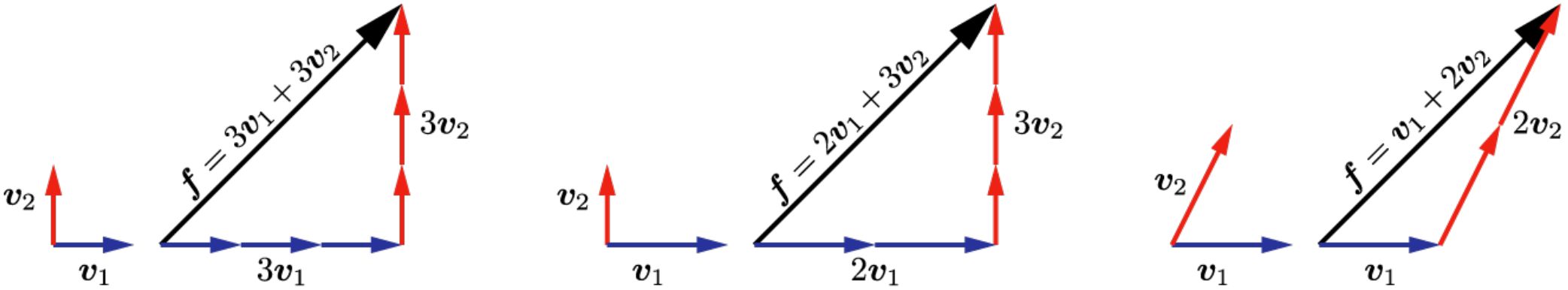
$$\begin{cases} r = 0\,(\theta = 90°) & \rightarrow \text{相関がない (無関係)} \\ r = 1\,(\theta = 0°) & \rightarrow \text{正の相関 (相似)} \\ r = -1\,(\theta = 180°) & \rightarrow \text{負の相関 (逆向き)} \end{cases}$$

正規直交基

正規化された
(長さを1にした)

互いに直交する

基底
(物差しの集合)



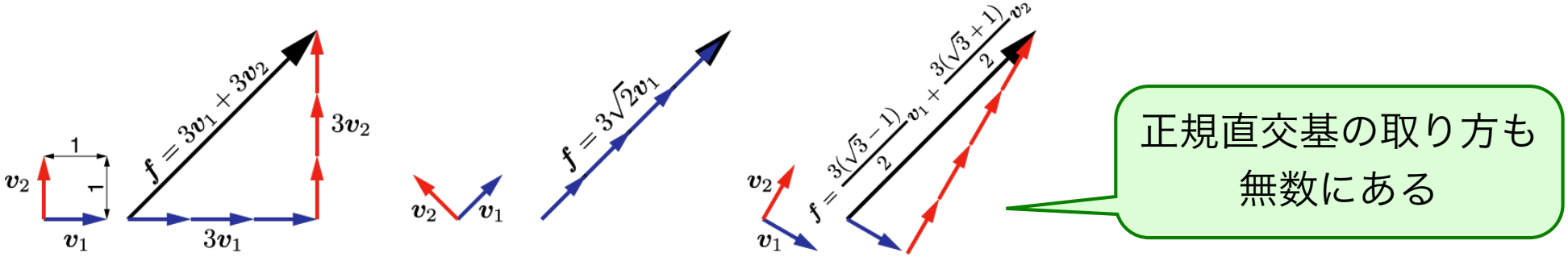
長さが0ではなく、且つ平行でない2つのベクトル $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ の**一次結合** $C_1\boldsymbol{v}_1 + C_2\boldsymbol{v}_2$ **で**、2次元空間内の**任意のベクトルを表現**できる。

$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\} \rightarrow$ **基底**という

基底の取り方は無数にある

基底のうち、互いに直交しているものを**直交基**といいい、
直交基のうち全ての長さが1であるものを**正規直交基**という

正規直交基



正規直交基の取り方も
無数にある

$\boldsymbol{f}$ の $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ に対する係数 C_1, C_2 を求めてみよう。
$\boldsymbol{f} = C_1\boldsymbol{v}_1 + C_2\boldsymbol{v}_2$ の両辺と$\boldsymbol{v}_1$の内積をとると、

$$
\begin{aligned}
< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v_1} > &= < C_1\boldsymbol{v_1} + C_2\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_1} > \\
&= < C_1\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_1} > + < C_2\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_1} > \\
&= C_1 < \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_1} > + C_2 < \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_1} > \\
&= C_1 ||\boldsymbol{v_1}||^2 + C_2 ||\boldsymbol{v_2}|| \, ||\boldsymbol{v_1}|| \cos(90^\circ) \\
&= C_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
C_1 = < \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_1 > \\
C_2 = < \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_2 >
\end{cases}
$$

ここまでのまとめ(2次元ベクトル)

ノルム： $||\boldsymbol{f}|| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$ $(3\cdot 1)$

距離： $\mathrm{d}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}) = ||\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}|| = \sqrt{(f_1-g_1)^2+(f_2-g_2)^2}$ $(3\cdot 2)$

内積： $< \boldsymbol{f},\boldsymbol{g} >= ||\boldsymbol{f}||\,||\boldsymbol{g}||\cos\theta = f_1g_1 + f_2g_2$ $(3\cdot 3)/(3\cdot 5)$

$< \boldsymbol{f},\boldsymbol{f} >= f_1^2 + f_2^2 = ||\boldsymbol{f}||^2$ $(3\cdot 6)$

相関係数：$r = \dfrac{< \boldsymbol{f},\boldsymbol{g} >}{||\boldsymbol{f}||\,||\boldsymbol{g}||} = \dfrac{f_1g_1+f_2g_2}{\sqrt{f_1^2+f_2^2}\sqrt{g_1^2+g_2^2}}$ $(3\cdot 4)/(3\cdot 7)$

正規直交基：互いに直交した単位ベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1,\,\boldsymbol{v}_2\}$

$\boldsymbol{f} = C_1\boldsymbol{v}_1 + C_2\boldsymbol{v}_2$ $(3\cdot 8)$

$$\begin{cases} C_1 =< \boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_1 > \\ C_2 =< \boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_2 > \end{cases} \quad (3\cdot 9)$$

$$\begin{cases} < \boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2 >= 0 \\ ||\boldsymbol{v}_1|| = 1\,,\ ||\boldsymbol{v}_2|| = 1 \end{cases}$$

信号をベクトルで扱う

二次元ベクトル $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$　　平面

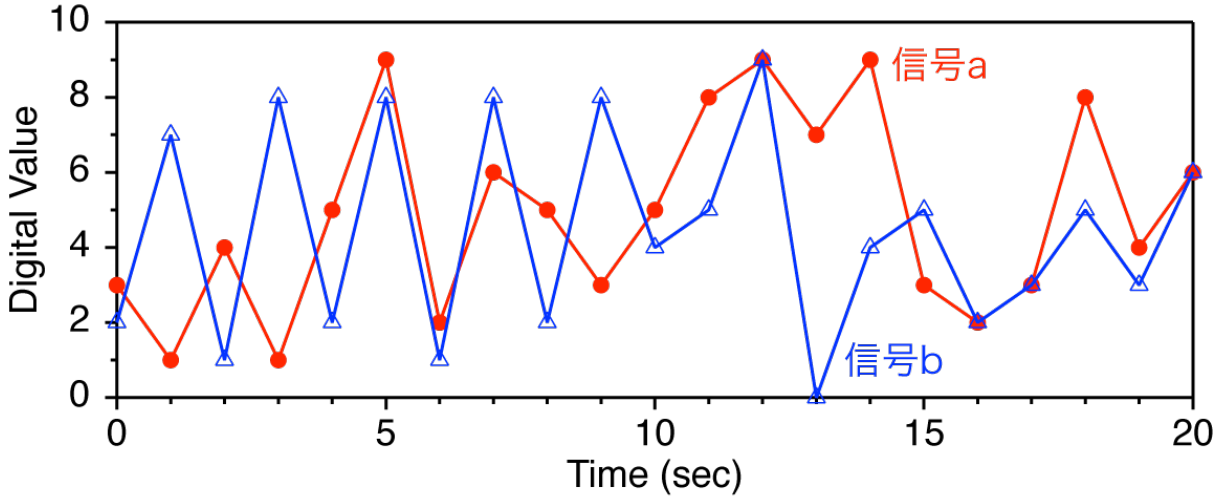
三次元ベクトル $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)$　　立体

信号をベクトルで扱う

二次元ベクトル $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ → 2個の値の組

三次元ベクトル $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)$ → 3個の値の組

N次元ベクトル $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3, \cdots, f_N)$ → N個の値の組



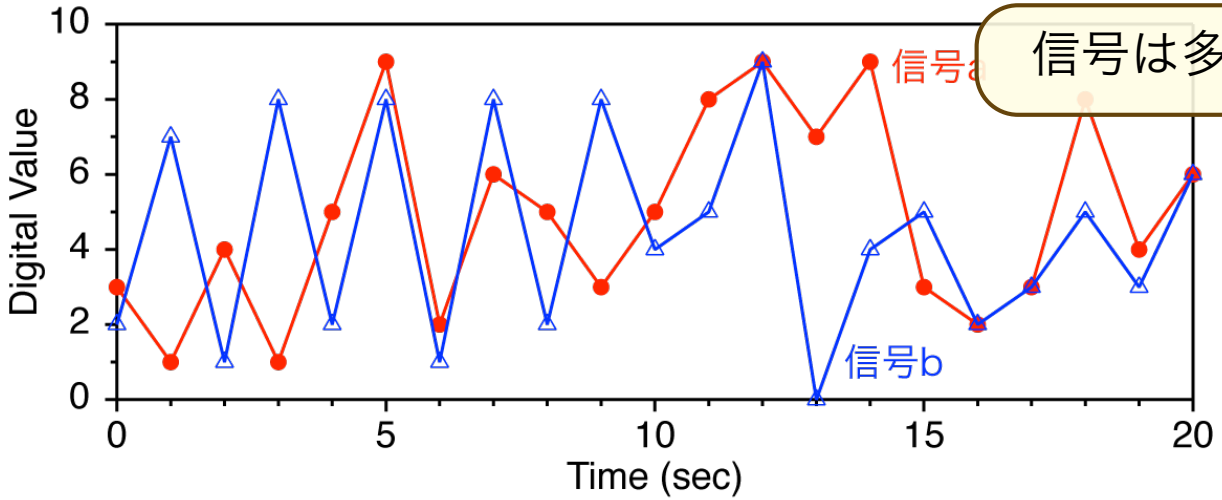
ディジタル化された信号は
有限個の値を持つ数値の組

信号をベクトルで扱う

二次元ベクトル $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ → 2個の値の組

三次元ベクトル $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)$ → 3個の値の組

N次元ベクトル $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3, \cdots, f_N)$ → N個の値の組



信号は多次元ベクトル空間内の1点に相当

$\boldsymbol{a} = (3, 1, 4, 1, 5, \cdots, 4, 6)$

$\boldsymbol{b} = (2, 7, 1, 8, 2, \cdots, 3, 6)$

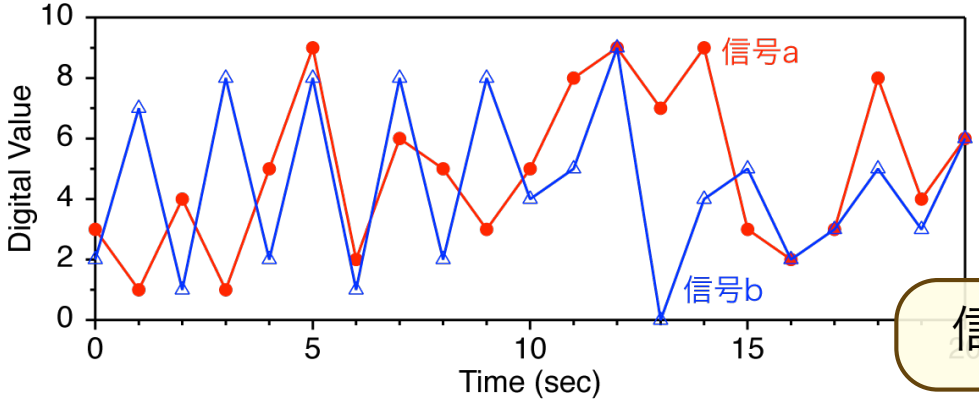
ディジタル化された信号は
有限個の値を持つ数値の組

多次元のベクトルで、
信号を扱うことができる

信号処理をベクトル演算で行える！

信号をベクトルで扱う

N次元ベクトル　$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3, \cdots, f_N)$　→ N個の値の組



$\boldsymbol{a} = (3, 1, 4, 1, 5, \cdots, 4, 6)$

$\boldsymbol{b} = (2, 7, 1, 8, 2, \cdots, 3, 6)$

信号は多次元ベクトル空間内の1点に相当

ディジタル化された信号は
有限個の値を持つ数値の組

多次元のベクトルで、
信号を扱うことができる

信号処理をベクトル演算で行える！

例えば、以下のようなことができる。

- **相関係数**を用いて2つの信号が「似ている」のかどうか判断する
- 得られた信号を基準信号(基底)の**一次結合で表現**する
  (信号がどのような成分を含んでいるか調べる)

二次元ベクトルから多次元へ

ノルム：　$||\boldsymbol{f}|| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$

距離：　$\mathrm{d}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) = \sqrt{(f_1 - g_1)^2 + (f_2 - g_2)^2}$

内積：　$< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} >= f_1 g_1 + f_2 g_2$

相関係数：$r = \cos\theta = \dfrac{< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} >}{||\boldsymbol{f}||\,||\boldsymbol{g}||}$

正規直交基：$\{\boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_2\}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} < \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 >= 0 \\ ||\boldsymbol{v}_1|| = 1\,,\ ||\boldsymbol{v}_2|| = 1 \end{cases}$

$\boldsymbol{f} = C_1 \boldsymbol{v}_1 + C_2 \boldsymbol{v}_2$

$\begin{cases} C_1 =< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_1 > \\ C_2 =< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_2 > \end{cases}$

多次元ベクトルへの拡張

ノルム： $$||\boldsymbol{f}|| = \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_N^2}{N}} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i^2}$$

次元数で規格化

距離： $$\mathrm{d}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) = \sqrt{\frac{(f_1 - g_1)^2 + \cdots + (f_N - g_N)^2}{N}} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (f_i - g_i)^2}$$

内積： $$< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} >= \frac{f_1 g_1 + f_2 g_2 + \cdots + f_N g_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i g_i$$

相関係数： $$r = \cos\theta = \frac{< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} >}{||\boldsymbol{f}||\,||\boldsymbol{g}||}$$

多次元でも「角度」が定義できる
(あくまでも概念としての角度)

正規直交基： $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_N\}$

$$\begin{cases} < \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j >= \delta_{ij} \\ ||\boldsymbol{v}_i|| = 1 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{f} = C_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + C_N\boldsymbol{v}_N = \sum_{i=1}^{N} C_i\boldsymbol{v}_i$$

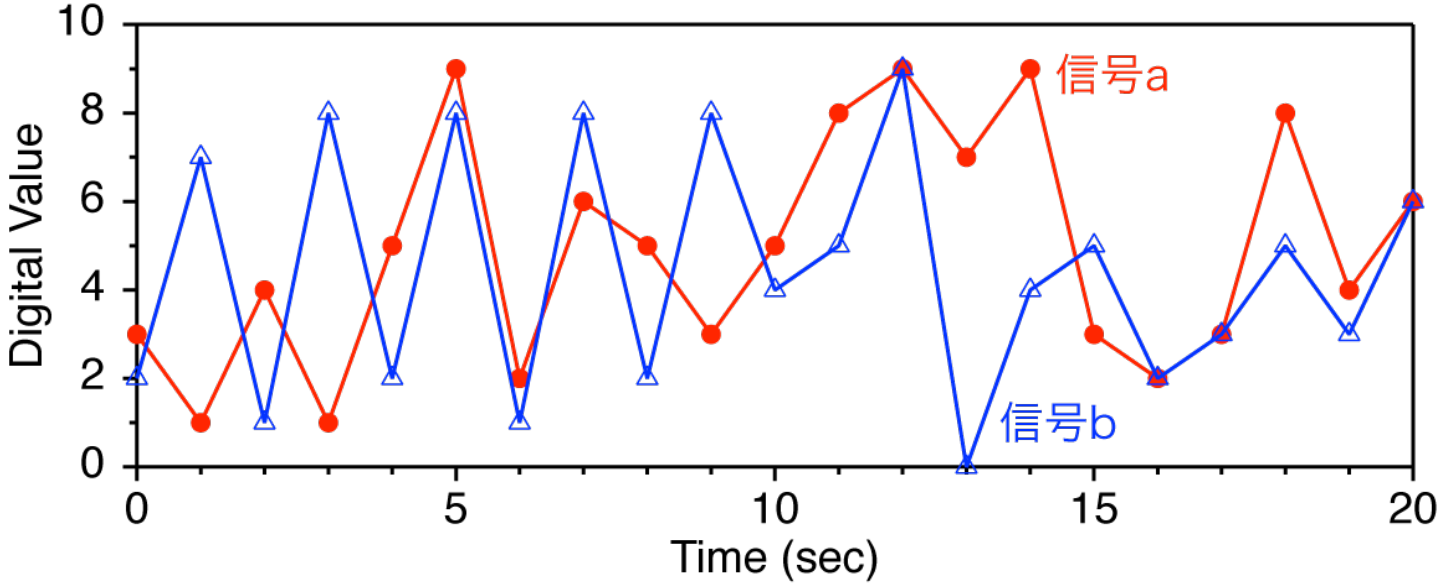
$$C_i =< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_i >$$

次元の数と基底を構成する
単位ベクトルの数は等しい

クロネッカーのデルタ

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 : i = j \\ 0 : i \neq j \end{cases}$$

多次元ベクトルの計算例

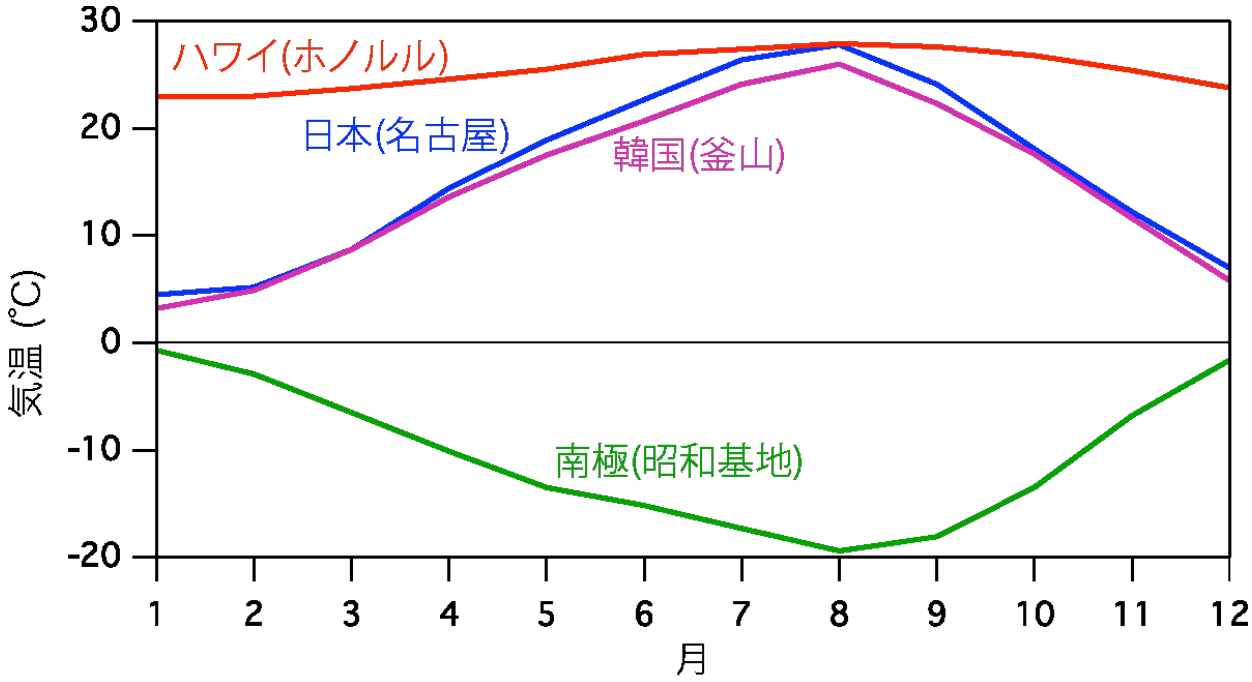


$$\boldsymbol{a} = (3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 8, 9, 7, 9, 3, 2, 3, 8, 4, 6)$$
$$\boldsymbol{b} = (2, 7, 1, 8, 2, 8, 1, 8, 2, 8, 4, 5, 9, 0, 4, 5, 2, 3, 5, 3, 6)$$

$$||\boldsymbol{a}|| = \sqrt{\frac{645}{21}} = 5.54 \qquad ||\boldsymbol{b}|| = \sqrt{\frac{565}{21}} = 5.19 \qquad \mathrm{d}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sqrt{\frac{242}{21}} = 3.39$$

$$< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} >= \frac{484}{21} = 23.05 \qquad r = \frac{23.05}{5.54 \times 5.19} = 0.802 \ (\theta = 36.7^\circ)$$

相関係数の計算例(世界の気温を例に)



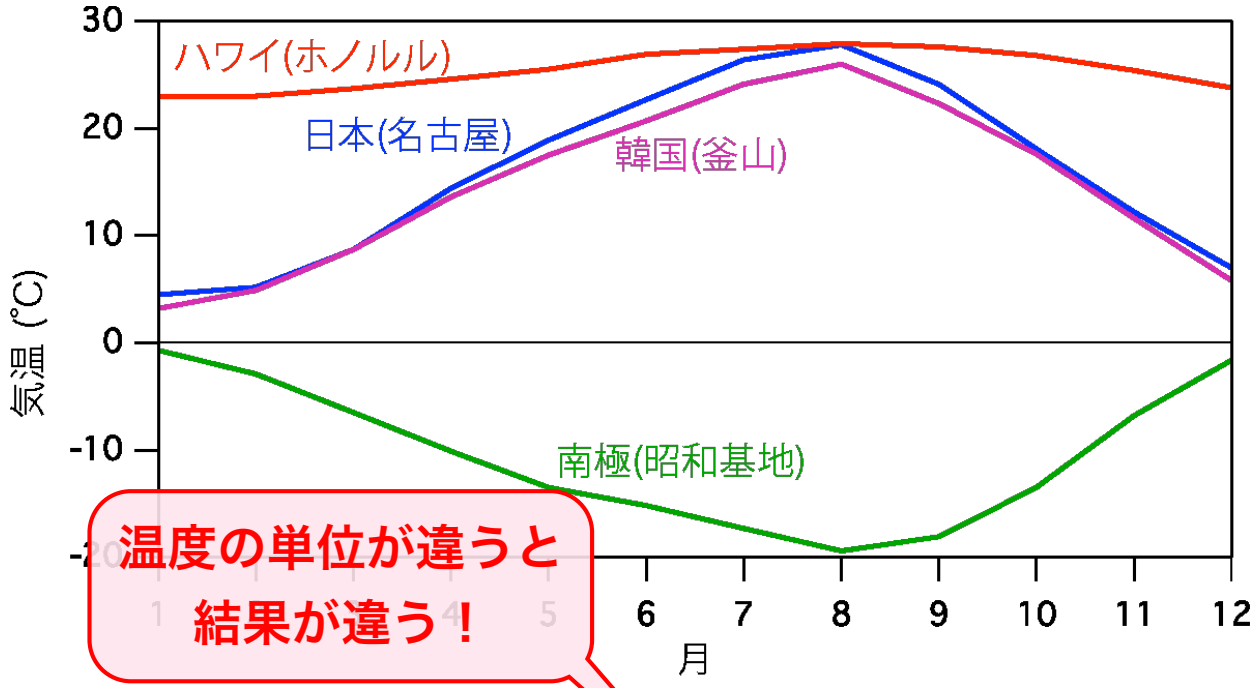
名古屋を基準に、各地との相関係数を計算すると、

正の相関

	℃
釜山	1.00
ホノルル	0.92
昭和基地	–0.99

負の相関

相関係数の計算例(世界の気温を例に)



温度の単位が違うと結果が違う！

名古屋を基準に、各地との相関係数を計算すると、

正の相関

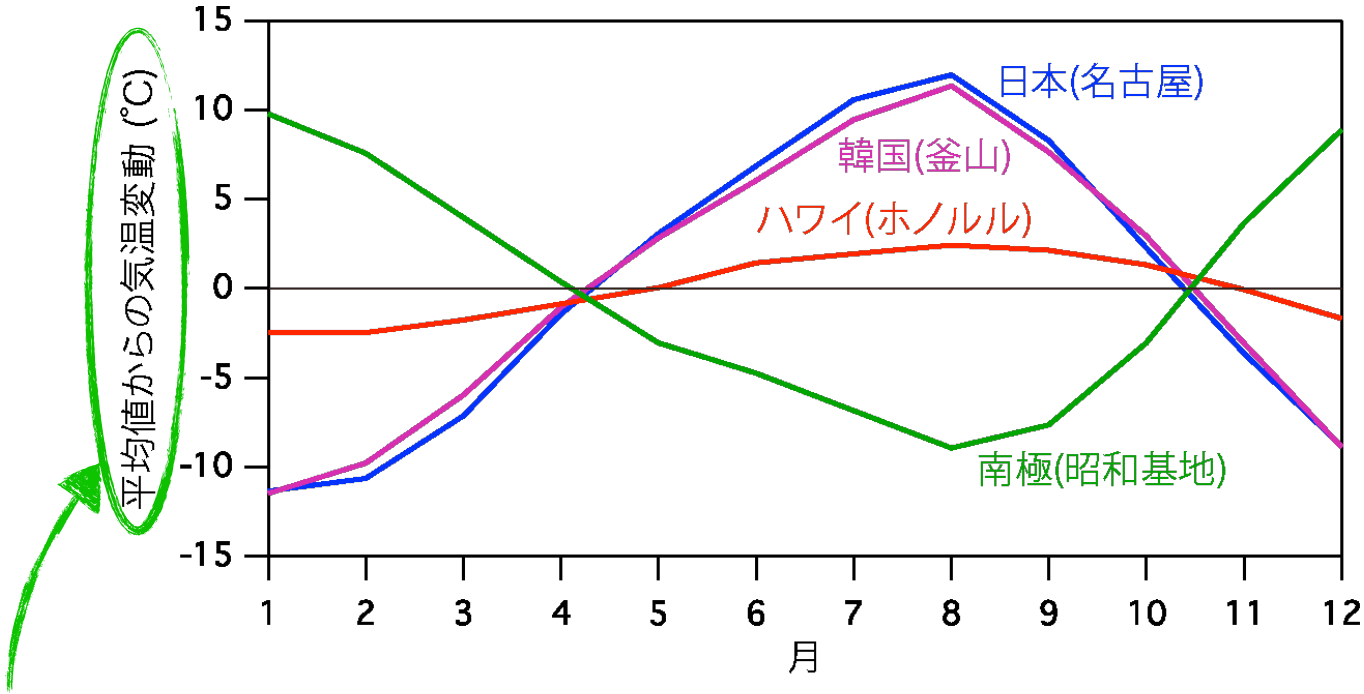
	℃	K
釜山	1.00	1.00
ホノルル	0.92	1.00
昭和基地	−0.99	1.00

正の相関

絶対0度から見たら、地表の温度変化は誤差の範囲

負の相関

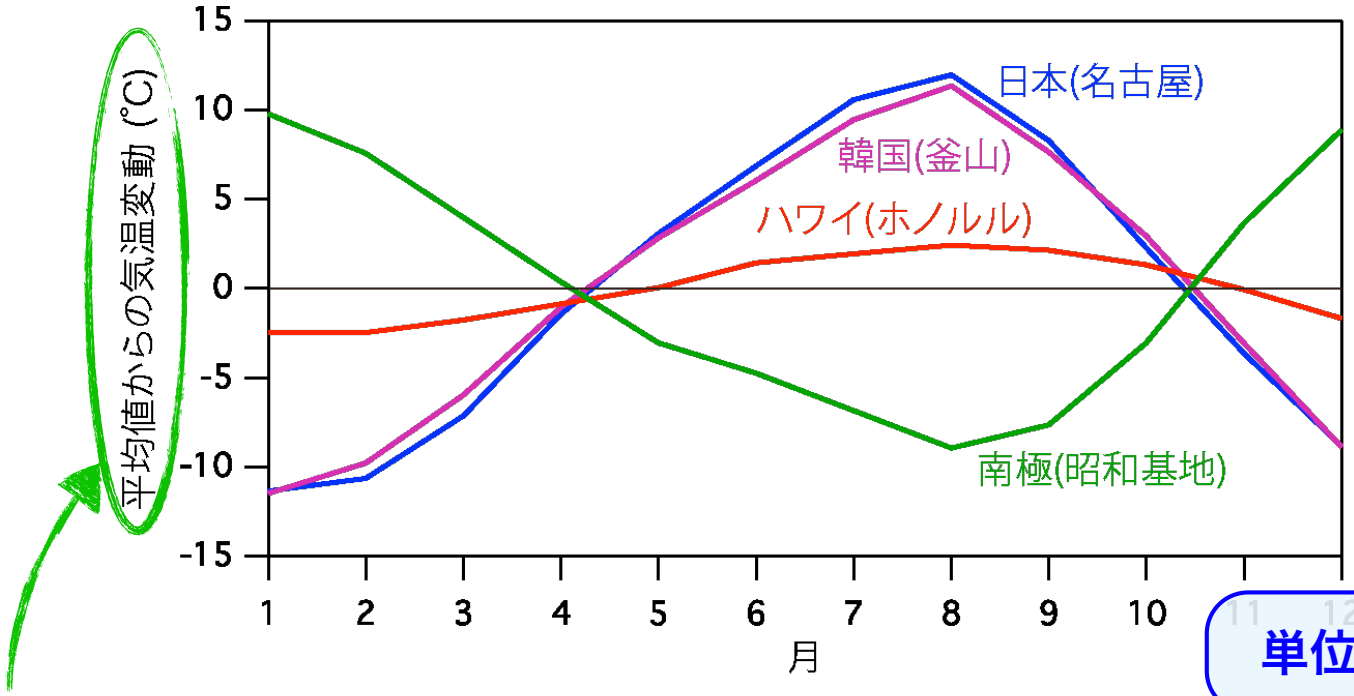
相関係数の計算例(世界の気温を例に)



気温変動に着目して相関係数を計算

	℃	K
釜山	1.00	1.00
ホノルル	0.92	1.00
昭和基地	–0.99	1.00

相関係数の計算例(世界の気温を例に)



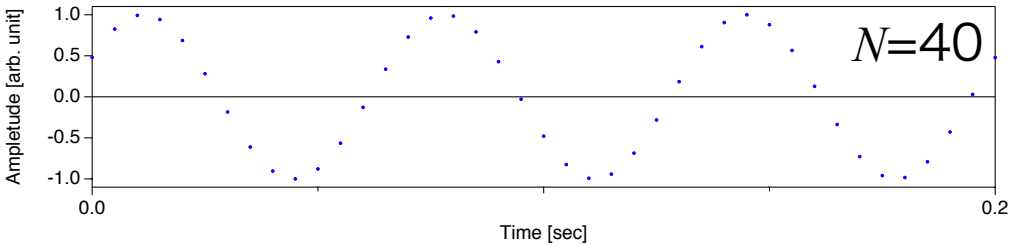
気温変動に着目して相関係数を計算

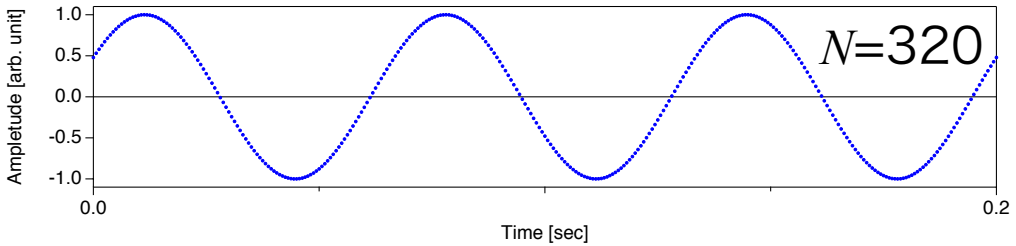
単位に依存しない

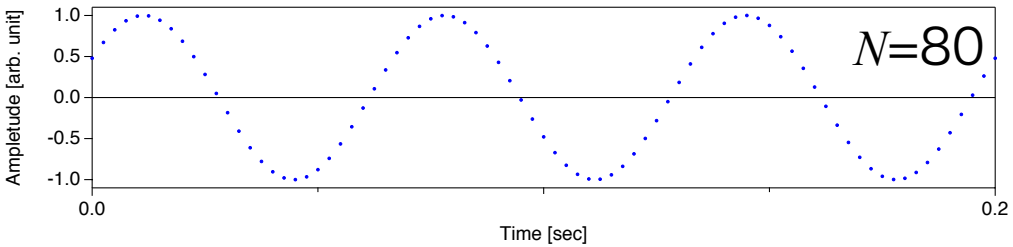
	℃	K	変動値(℃/K)
釜山	1.00	1.00	1.00
ホノルル	0.92	1.00	0.97
昭和基地	–0.99	1.00	–0.98

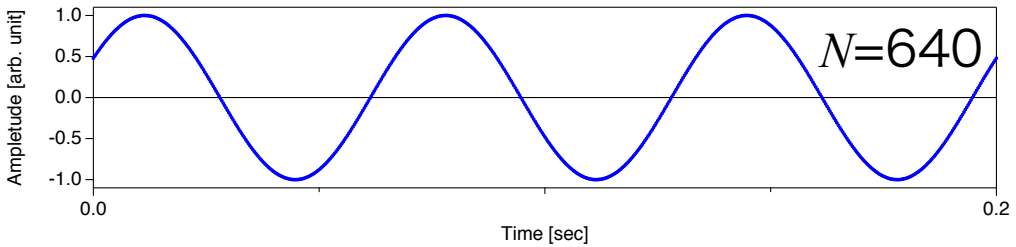
多次元から無限次元(関数空間)へ

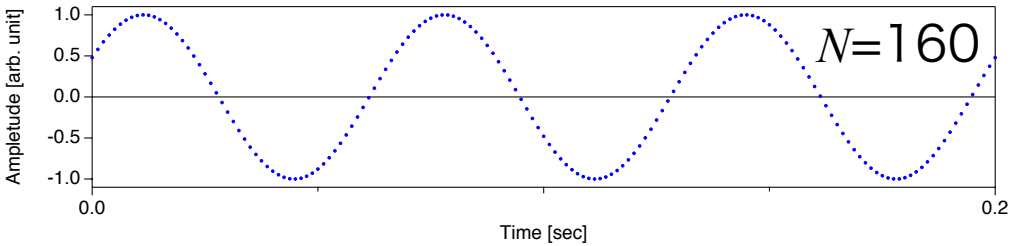
ここで、一旦デジタル信号(離散的)を離れてアナログ信号(連続的)に立ち戻る

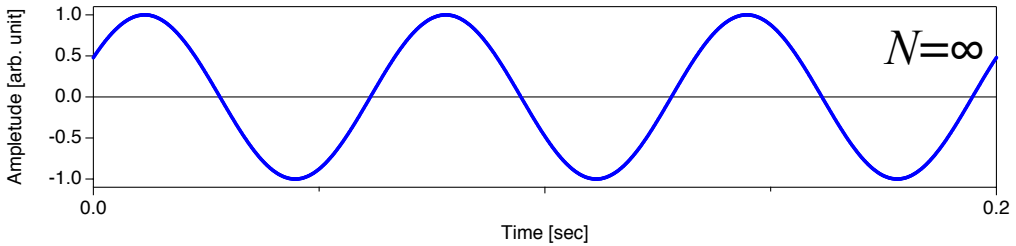










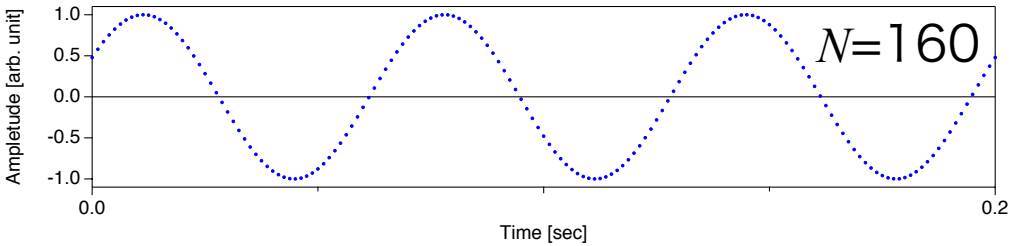


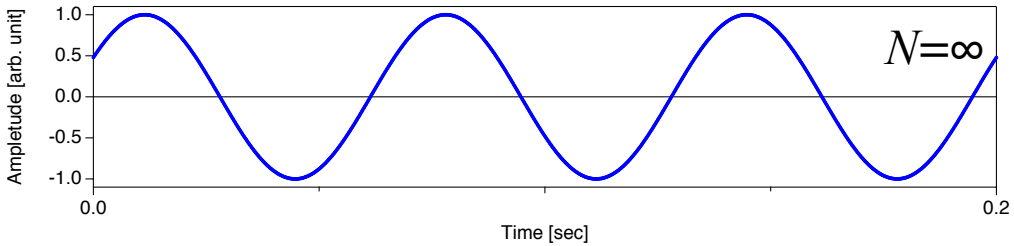
$N \to \infty$ でアナログ(連続)信号になる

多次元ベクトル $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_N)$ → 関数 $f(t)$

多次元から無限次元(関数空間)へ

ここで、一旦デジタル信号(離散的)を離れてアナログ信号(連続的)に立ち戻る





$N \to \infty$ でアナログ(連続)信号になる

多次元ベクトル $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_N) \to$ 関数 $f(t)$

ベクトルと同じ演算(ノルム、内積、相関係数など)を関数に適応

一つの多次元ベクトルが多次元空間内の1点であるのと同様に、
一つの関数が関数空間内の1点であると考える

多次元から無限次元(関数空間)へ

ノルム：　$||\boldsymbol{f}|| = \sqrt{\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i^2}$

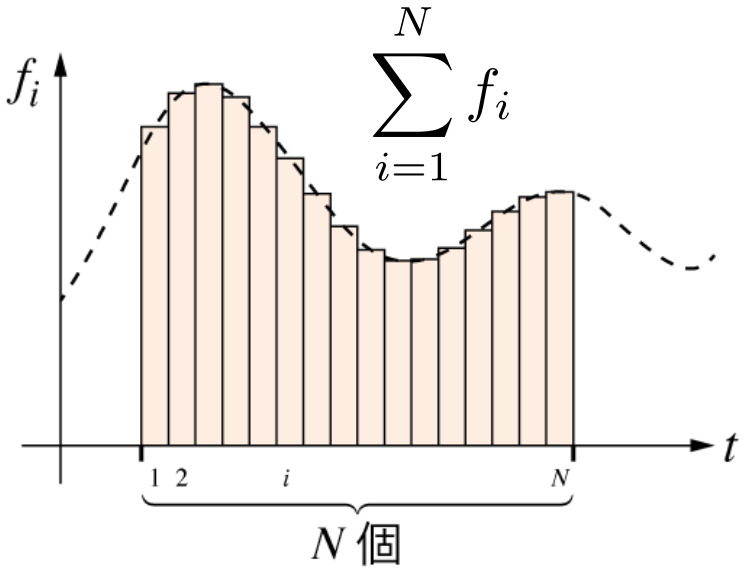
$||f(t)|| = \sqrt{\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f^2(t)\,dt}$

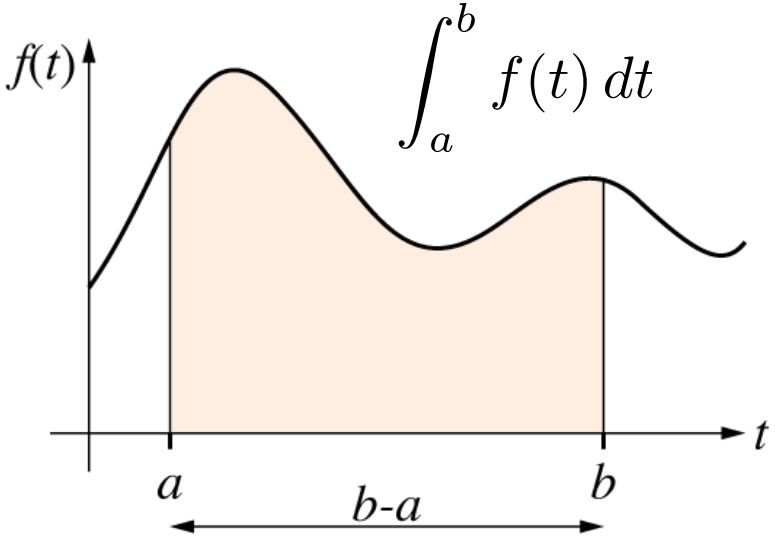
内積：　$< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} >= \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i g_i$

$< f(t), g(t) >= \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt$

相関係数：$r = \cos\theta = \dfrac{< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} >}{||\boldsymbol{f}||\,||\boldsymbol{g}||}$

$r = \cos\theta = \dfrac{< f(t), g(t) >}{||f(t)||\,||g(t)||}$





多次元から無限次元(関数空間)へ

ノルム： $||\boldsymbol{f}|| = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i^2}$

内積： $< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} >= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i g_i$

相関係数：$r = \cos\theta = \frac{< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} >}{||\boldsymbol{f}||\,||\boldsymbol{g}||}$

$||f(t)|| = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)\,dt}$

$< f(t), g(t) >= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)\,dt$

$r = \cos\theta = \frac{< f(t), g(t) >}{||f(t)||\,||g(t)||}$

積分区間で規格化

関数間の「角度」が定義できる

$<f(t), g(t)> = 0$ ならば、

$f(t)$ と $g(t)$ は互いに**直交**

関数のノルム・内積・相関係数

$f(t) = 1,\ g(t) = t,\ h(t) = t^2$ のとき、t が [-1, 1] の範囲で
それぞれの関数のノルムと内積を求めてみよう。

$$||f(t)|| = \sqrt{\frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1} 1^2\,dt} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[t\right]_{-1}^{1}} = 1$$

$$||g(t)|| = \sqrt{\frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1} t^2\,dt} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$||h(t)|| = \sqrt{\frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1} t^4\,dt} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\frac{t^5}{5}\right]_{-1}^{1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$< f(t), g(t) >= \frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1} t\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0 \rightarrow \text{直交}$$

$$< f(t), h(t) >= \frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} \rightarrow \text{直交でない}$$

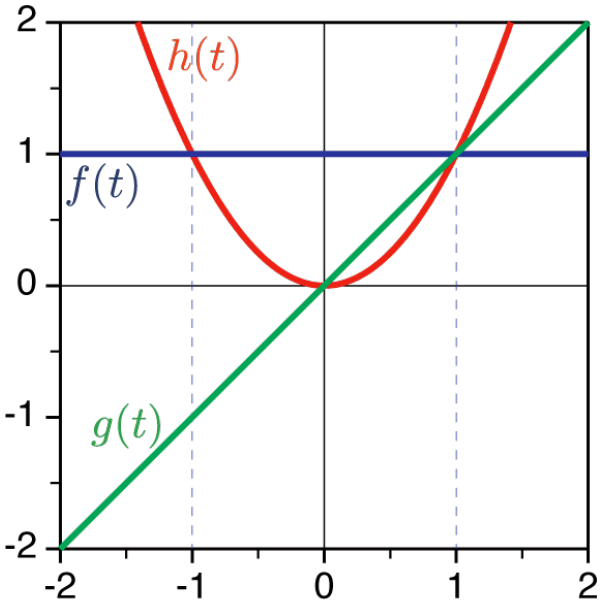
$$< g(t), h(t) >= \frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1} t^3\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 0 \rightarrow \text{直交}$$

関数の「直交」とは？

$$f(t) = 1,\ g(t) = t,\ h(t) = t^2$$

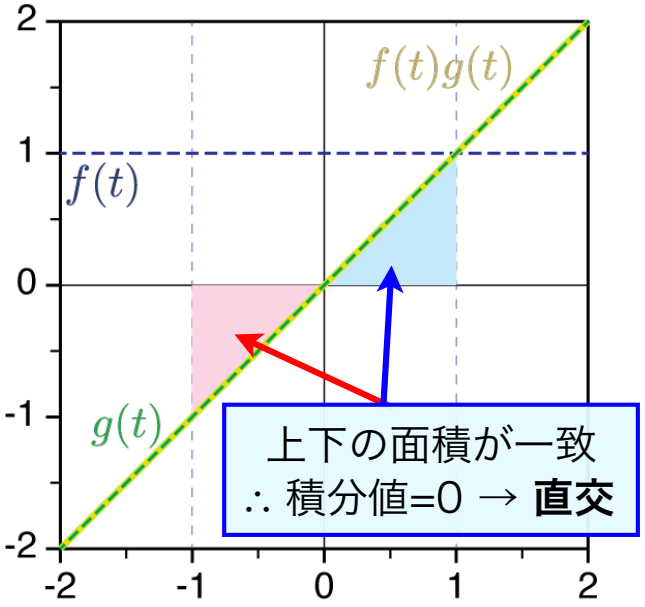
$$< f(t), g(t) >= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)\,dt$$

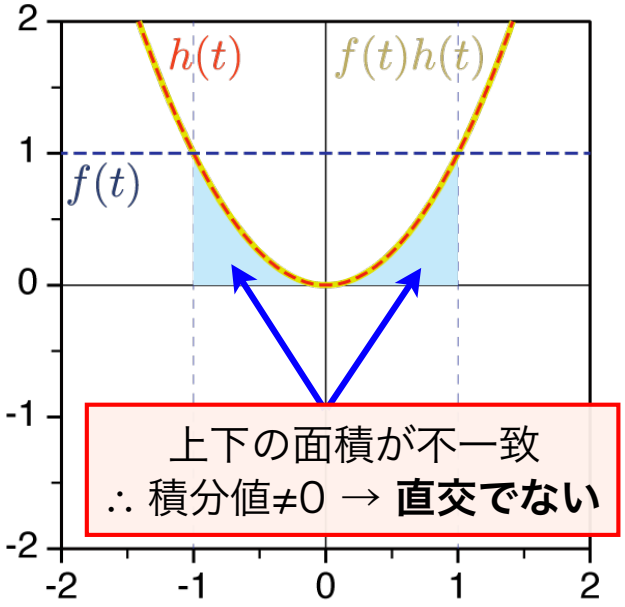
関数の内積は、関数の積を
指定範囲で積分したもの

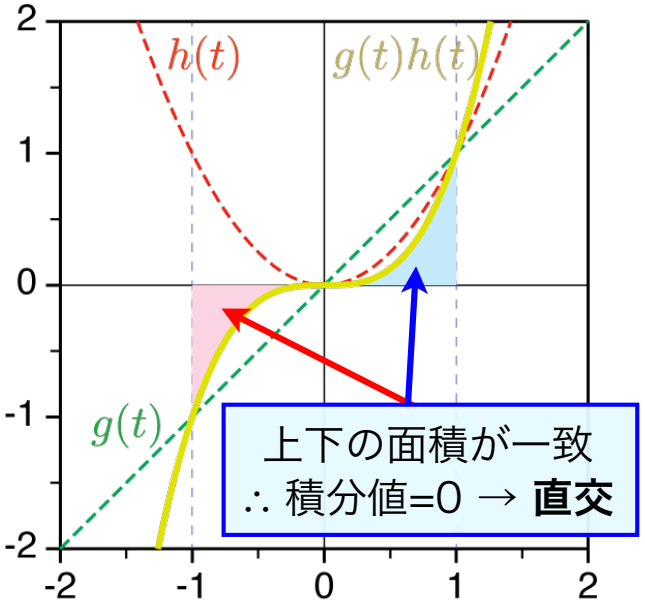


関数の「直交」とは？

$$f(t) = 1,\ g(t) = t,\ h(t) = t^2$$

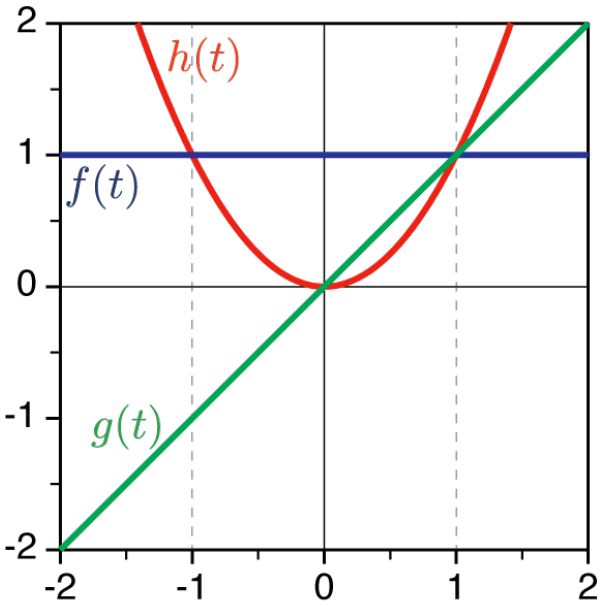






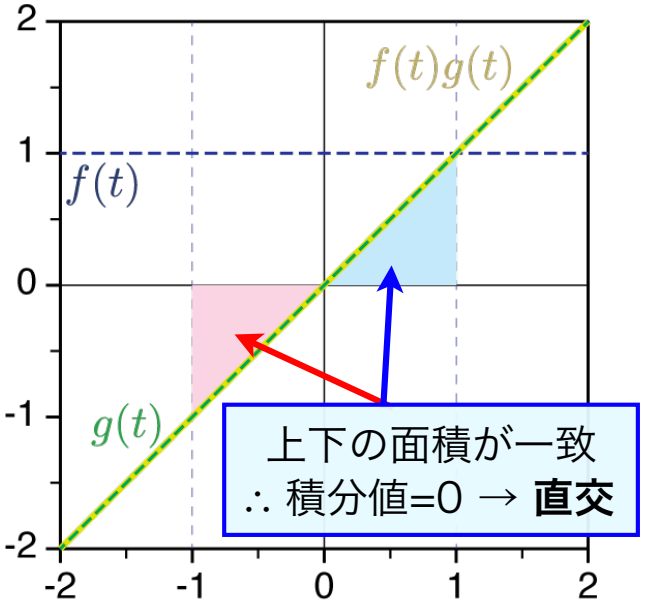
$$< f(t), g(t) >= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)\,dt$$

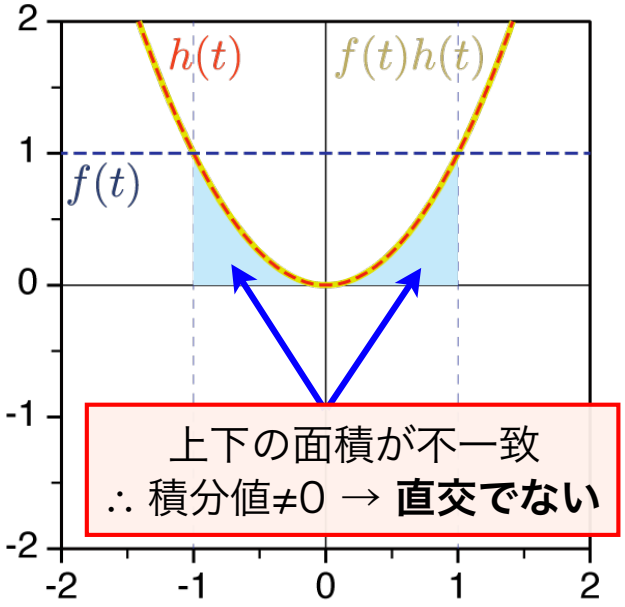
関数の内積は、関数の積を
指定範囲で積分したもの

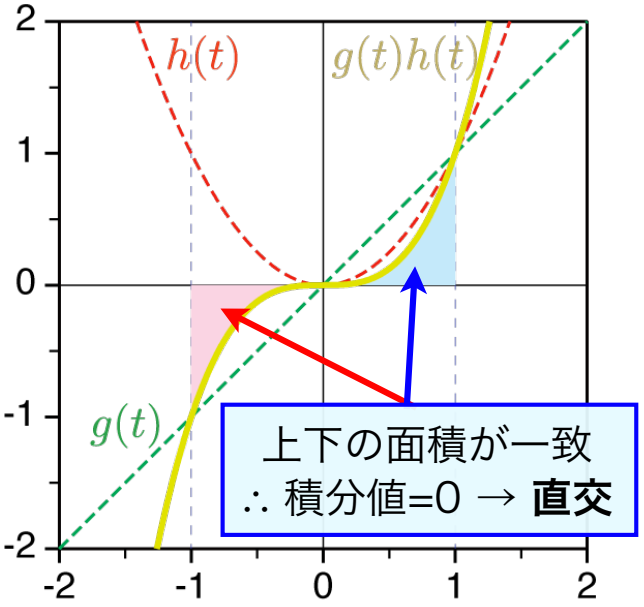


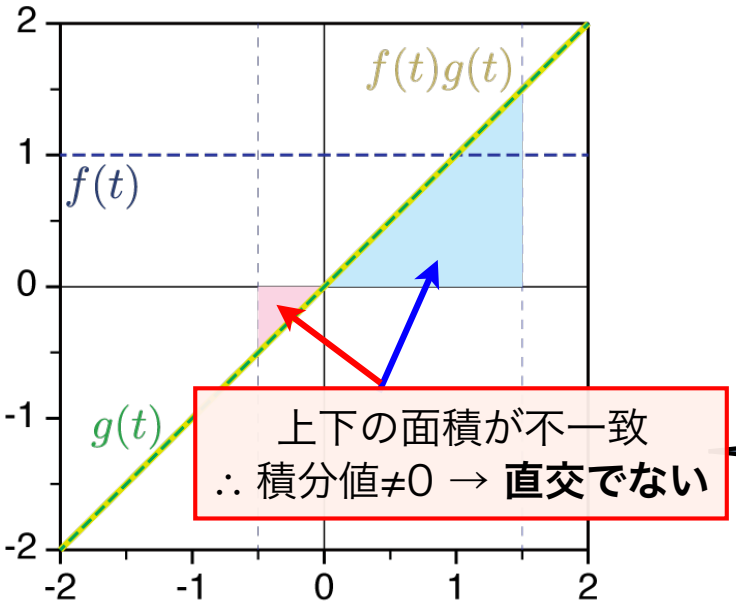
関数の「直交」とは？

$$f(t) = 1,\ g(t) = t,\ h(t) = t^2$$









$$< f(t), g(t) >= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)g(t)\,dt$$

関数の内積は、関数の積を
指定範囲で積分したもの

関数の内積は積分範囲に依存
∴ **関数の直交性は積分範囲に依存**

正規直交関数系

正規直交基：$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_N\}$

N個のベクトルの集合

$$\begin{cases} < \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j >= \delta_{ij} \\ ||\boldsymbol{v}_i|| = 1 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{N} C_i \boldsymbol{v}_i \,, \quad C_i =< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_i >$$

任意のベクトルは、正規直交基の一次結合で表現できる

正規直交関数系： $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t), \cdots\}$

無限個の関数の集合

$$\begin{cases} < \phi_i(t), \phi_j(t) >= \delta_{ij} \\ ||\phi_i(t)|| = 1 \end{cases}$$

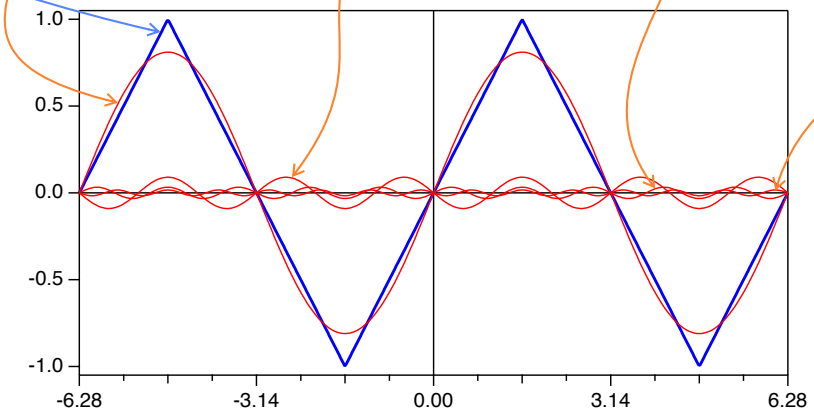
$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \phi_i(t) \,, \quad C_i =< f(t), \phi_i(t) >$$

任意の関数は、正規直交関数の一次結合で表現できる

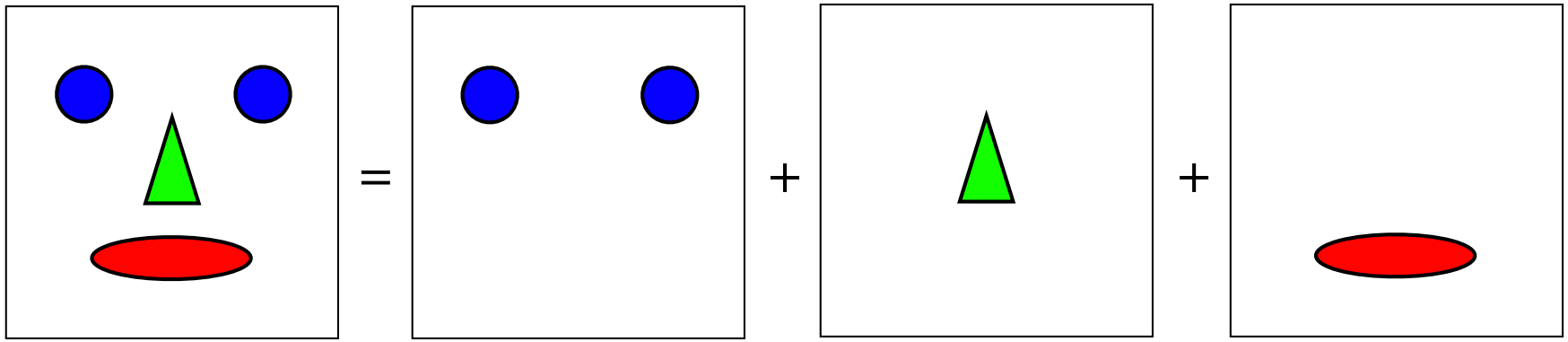
関数(信号)が一次結合で表現できるとは？

三角波の場合

$$f(t) = \frac{8}{\pi^2}\sin(t) - \frac{8}{9\pi^2}\sin(3t) + \frac{8}{25\pi^2}\sin(5t) - \frac{8}{49\pi^2}\sin(7t) + \cdots$$



画像信号の場合



正規直交関数系

正規直交基：$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_N\}$

N個のベクトルの集合

$$\begin{cases} < \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j >= \delta_{ij} \\ ||\boldsymbol{v}_i|| = 1 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{N} C_i \boldsymbol{v}_i \,, \quad C_i =< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_i >$$

任意のベクトルは、正規直交基の一次結合で表現できる

正規直交関数系： $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t), \cdots\}$

無限個の関数の集合

$$\begin{cases} < \phi_i(t), \phi_j(t) >= \delta_{ij} \\ ||\phi_i(t)|| = 1 \end{cases}$$

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \phi_i(t) \,, \quad C_i =< f(t), \phi_i(t) >$$

任意の関数は、正規直交関数の一次結合で表現できる

このような条件を満たす関数群は存在するか？

直交関数系

現在知られている主な直交関数系

- **三角関数系**
- エルミート多項式
- ルジャンドル多項式
- ラゲール多項式
- チェビシェフ多項式
- ゲーゲンバウアー多項式

情報処理分野では、
ほとんどが三角関数系を用いる

直交関数系 (三角関数)	範囲の例
$\{1,\ \cos t,\ \cos 2t,\ \cos 3t, \cdots\}$	$[0,\ \pi],\ [-\pi,\ 0],\ [-\pi,\ \pi]$
$\{\sin t,\ \sin 2t,\ \sin 3t, \cdots\}$	$[0,\ \pi],\ [-\pi,\ 0],\ [-\pi,\ \pi]$
$\{1,\ \cos t,\ \sin t,\ \cos 2t,\ \sin 2t, \cdots\}$	$[-\pi,\ \pi]$

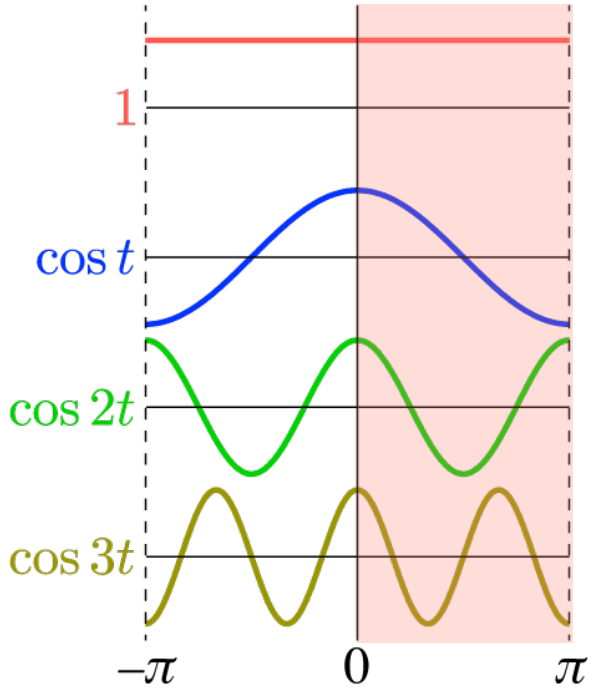
正規ではない：関数の正規化 $\phi_i^*(t) = \dfrac{\phi_i(t)}{||\phi_i(t)||}$ が必要

直交関数系

$\{1,\ \cos t,\ \cos 2t,\ \cos 3t, \cdots\}$ が $[0,\ \pi]$ の範囲で直交していることを示そう

- 1と$\cos nt$ $(n = 1, 2, \cdots)$の内積

- $\cos nt$ と $\cos mt$ $(n \neq m)$ の内積



直交関数系

$\{1,\ \cos t,\ \cos 2t,\ \cos 3t, \cdots\}$ が $[0,\ \pi]$ の範囲で直交していることを示そう

- 1と$\cos nt\ (n = 1, 2, \cdots)$の内積

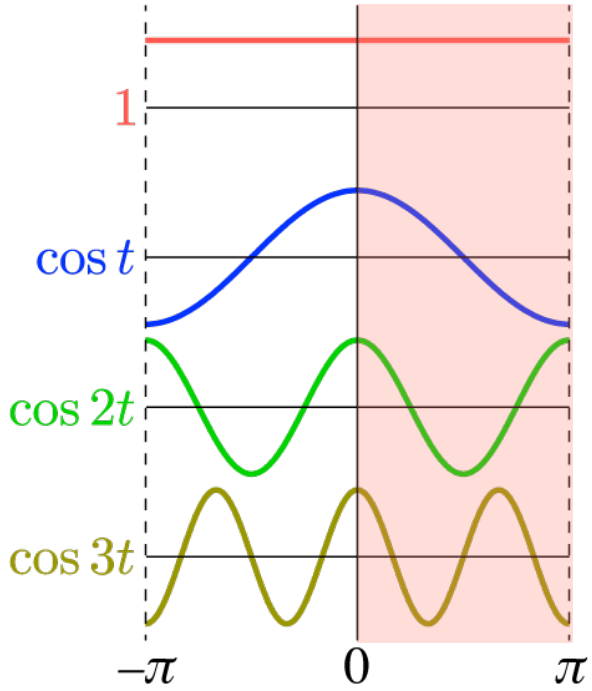
$$< 1, \cos mt >= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nt\, dt = \frac{1}{n\pi}\left[\sin nt\right]_0^{\pi} = 0$$

- $\cos nt$と$\cos mt\ (n \neq m)$の内積

三角関数の基礎

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x\,, \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$

$$\sin n\pi = 0\,, \quad \cos(x) = \cos(-x)$$



三角関数の基礎 (積和公式)

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \dfrac{1}{2}\{\sin(x+y) + \sin(x-y)\} \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{2}\{\cos(x+y) + \cos(x-y)\} \\ \sin x \sin y = -\dfrac{1}{2}\{\cos(x+y) - \cos(x-y)\} \end{cases}$$

$\{1, \cos t, \cos 2t, \cos 3t, \cdots\}$ が $[0, \pi]$ の範囲で直交していることを示そう

- 1と $\cos nt$ $(n = 1, 2, \cdots)$ の内積

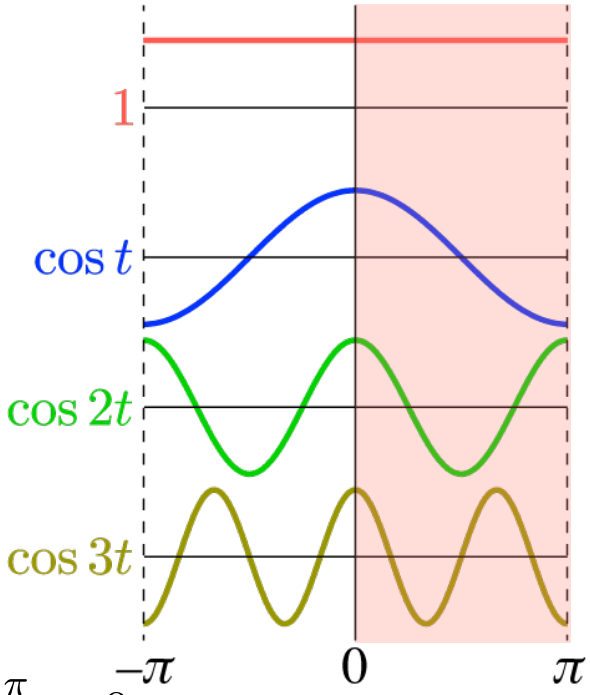
$$< 1, \cos mt >= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos mt\, dt = \frac{1}{m\pi}\left[\sin mt\right]_0^\pi = 0$$

- $\cos nt$ と $\cos mt$ $(n \neq m)$ の内積

$$< \cos nt, \cos mt >= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos nt \cos mt\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}\{\cos(n+m)t + \cos(n-m)t\}\, dt$$

$$= \frac{1}{2(n+m)\pi}\left[\sin(n+m)t\right]_0^\pi + \frac{1}{2(n-m)\pi}\left[\sin(n-m)t\right]_0^\pi = 0$$

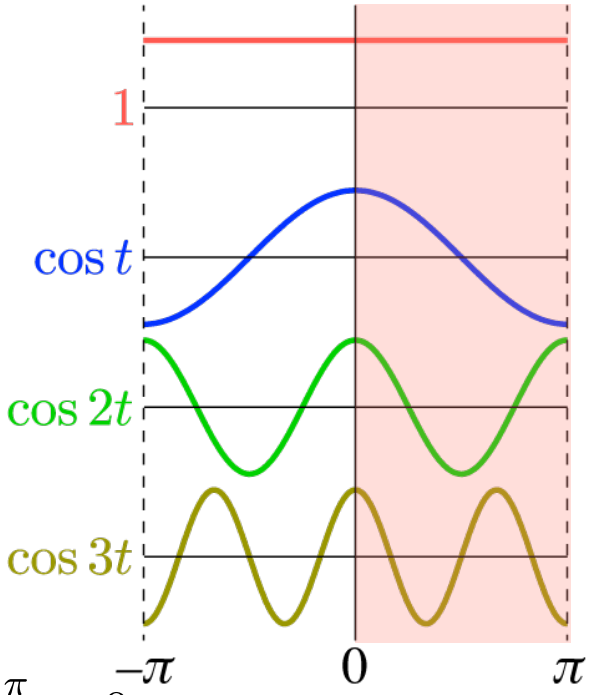


直交関数系

$\{1,\ \cos t,\ \cos 2t,\ \cos 3t, \cdots\}$ が $[0,\ \pi]$ の範囲で直交していることを示そう

- 1と$\cos nt\ (n = 1, 2, \cdots)$の内積

$$< 1, \cos mt >= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nt\, dt = \frac{1}{n\pi}\left[\sin nt\right]_0^{\pi} = 0$$



- $\cos nt$ と $\cos mt\ (n \neq m)$ の内積

$$< \cos nt, \cos mt >= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nt \cos mt\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left\{\cos(n+m)t + \cos(n-m)t\right\} dt$$

$$= \frac{1}{2(n+m)\pi}\left[\sin(n+m)t\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2(n-m)\pi}\left[\sin(n-m)t\right]_0^{\pi} = 0$$

- $\cos nt$ のノルム

$$||\cos nt|| = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2 nt\, dt} = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2nt}{2} dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}\left[t\right]_0^{\pi} + \frac{1}{4n\pi}\left[\sin 2nt\right]_0^{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

三角関数の基礎 (べき乗)

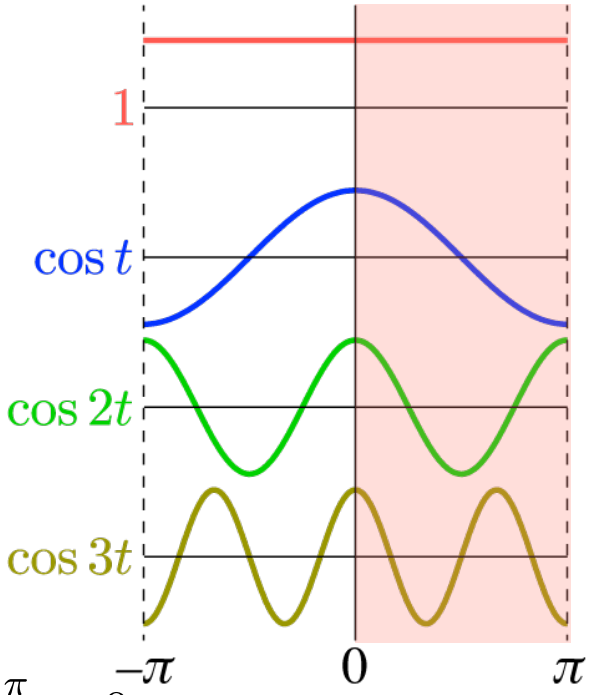
$$\begin{cases} \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} \end{cases}$$

直交関数系

$\{1,\ \cos t,\ \cos 2t,\ \cos 3t, \cdots\}$ が $[0,\ \pi]$ の範囲で直交していることを示そう

- 1と$\cos nt\ (n = 1, 2, \cdots)$の内積

$$< 1, \cos mt >= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nt\, dt = \frac{1}{n\pi}\left[\sin nt\right]_0^{\pi} = 0$$



- $\cos nt$ と $\cos mt\ (n \neq m)$ の内積

$$< \cos nt, \cos mt >= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nt \cos mt\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left\{\cos(n+m)t + \cos(n-m)t\right\} dt$$

$$= \frac{1}{2(n+m)\pi}\left[\sin(n+m)t\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2(n-m)\pi}\left[\sin(n-m)t\right]_0^{\pi} = 0$$

- $\cos nt$ のノルム

$$||\cos nt|| = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2 nt\, dt} = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2nt}{2} dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}\left[t\right]_0^{\pi} + \frac{1}{4n\pi}\left[\sin 2nt\right]_0^{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\{1,\ \sqrt{2}\cos t,\ \sqrt{2}\cos 2t,\ \cdots\}$
が**正規**直交関数系

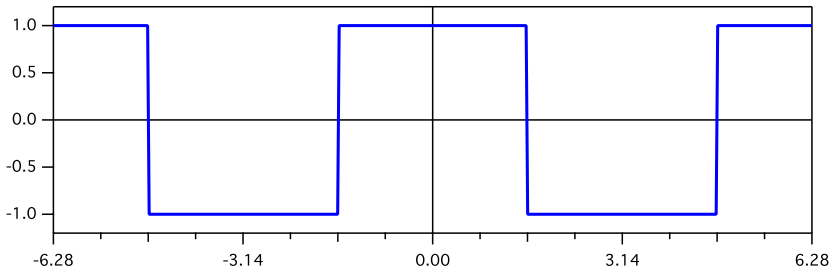
正規直交関数系

正規直交関数系： $\{\phi_1(t),\ \phi_2(t),\ \phi_3(t),\ \cdots\}$

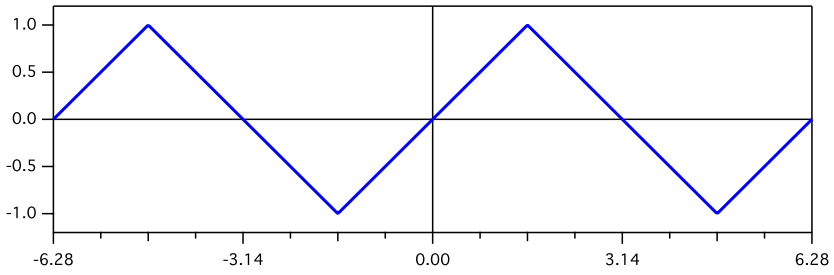
$$\begin{cases} < \phi_i(t),\ \phi_j(t) >= \delta_{ij} \\ ||\phi_i(t)|| = 1 \end{cases} \qquad f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \phi_i(t)\,,\ \ C_i =< f(t), \phi_i(t) >$$

正規直交関数系 (三角関数)	範囲の例
$\{1, \sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}\cos(2t), \sqrt{2}\cos(3t), \cdots\}$	$[0,\ \pi],\ [-\pi,\ 0],\ [-\pi,\ \pi]$
$\{\sqrt{2}\sin(t), \sqrt{2}\sin(2t), \sqrt{2}\sin(3t), \sqrt{2}\sin(4t), \cdots\}$	$[0,\ \pi],\ [-\pi,\ 0],\ [-\pi,\ \pi]$
$\{1, \sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}\sin(t), \sqrt{2}\cos(2t), \sqrt{2}\sin(2t), \cdots\}$	$[-\pi,\ \pi]$

矩形波：　$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4\sin(n\pi/2)}{n\pi}\cos(nt)$



三角波：　$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{8\sin(n\pi/2)}{n^2\pi^2}\sin(nt)$



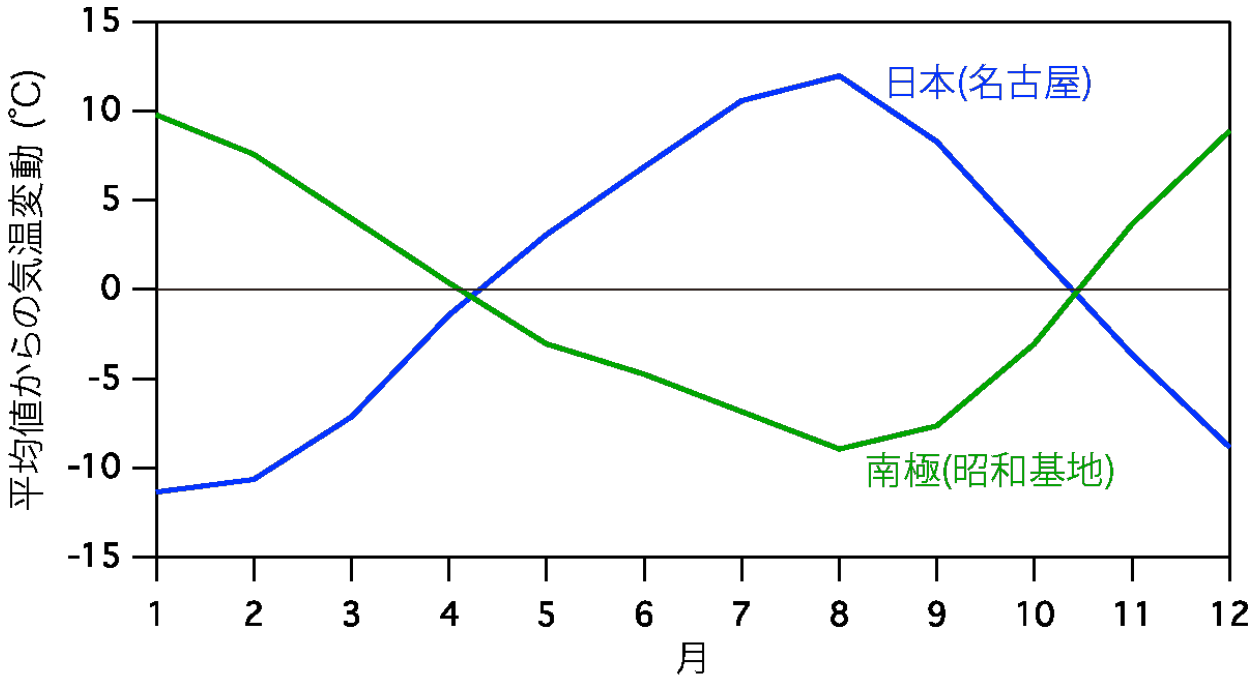
第4章 相関関数

教科書 pp51–62

- 相互相関関数
- 自己相関関数

相関係数の復習

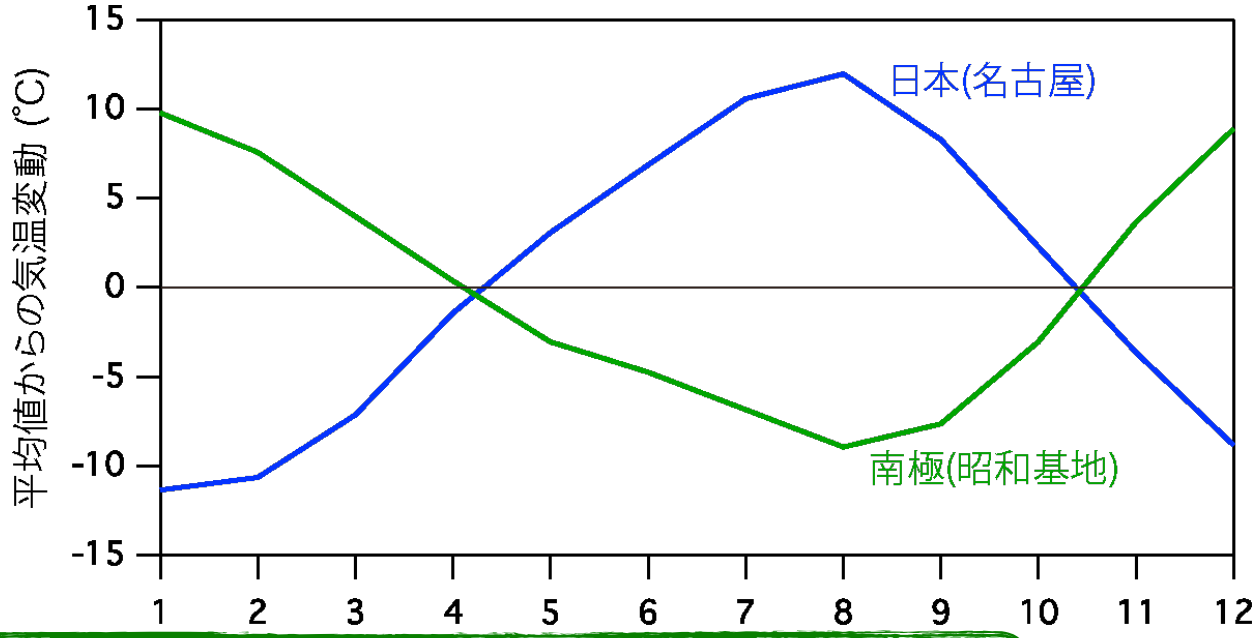
相関係数： $r = \cos\theta = \dfrac{< f(t), g(t) >}{||f(t)||\,||g(t)||}$



	相関係数
釜山	1.00
ホノルル	0.97
昭和基地	–0.98

負の相関
→夏冬が逆転

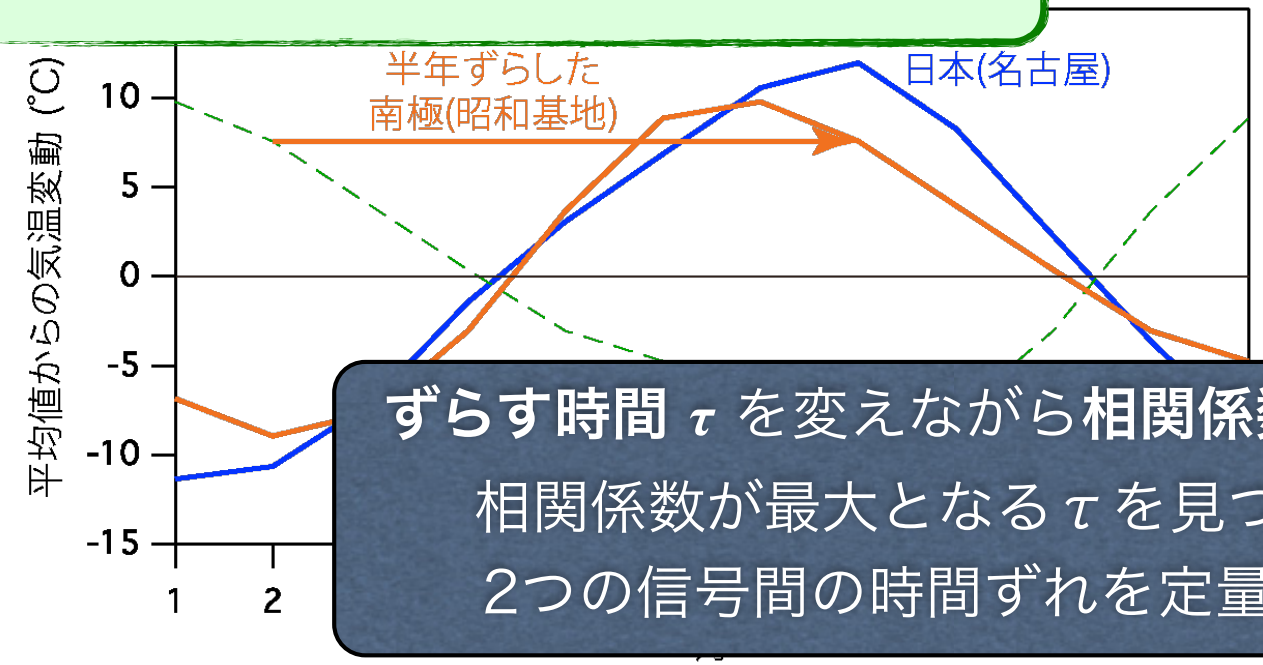
相関係数の復習



	相関係数
昭和基地	–0.98

負の相関
→夏冬が逆転

南極のグラフを6ヶ月ずらしてみる



正の相関
→半年ずらすと同じ

	相関係数
昭和基地’	0.95

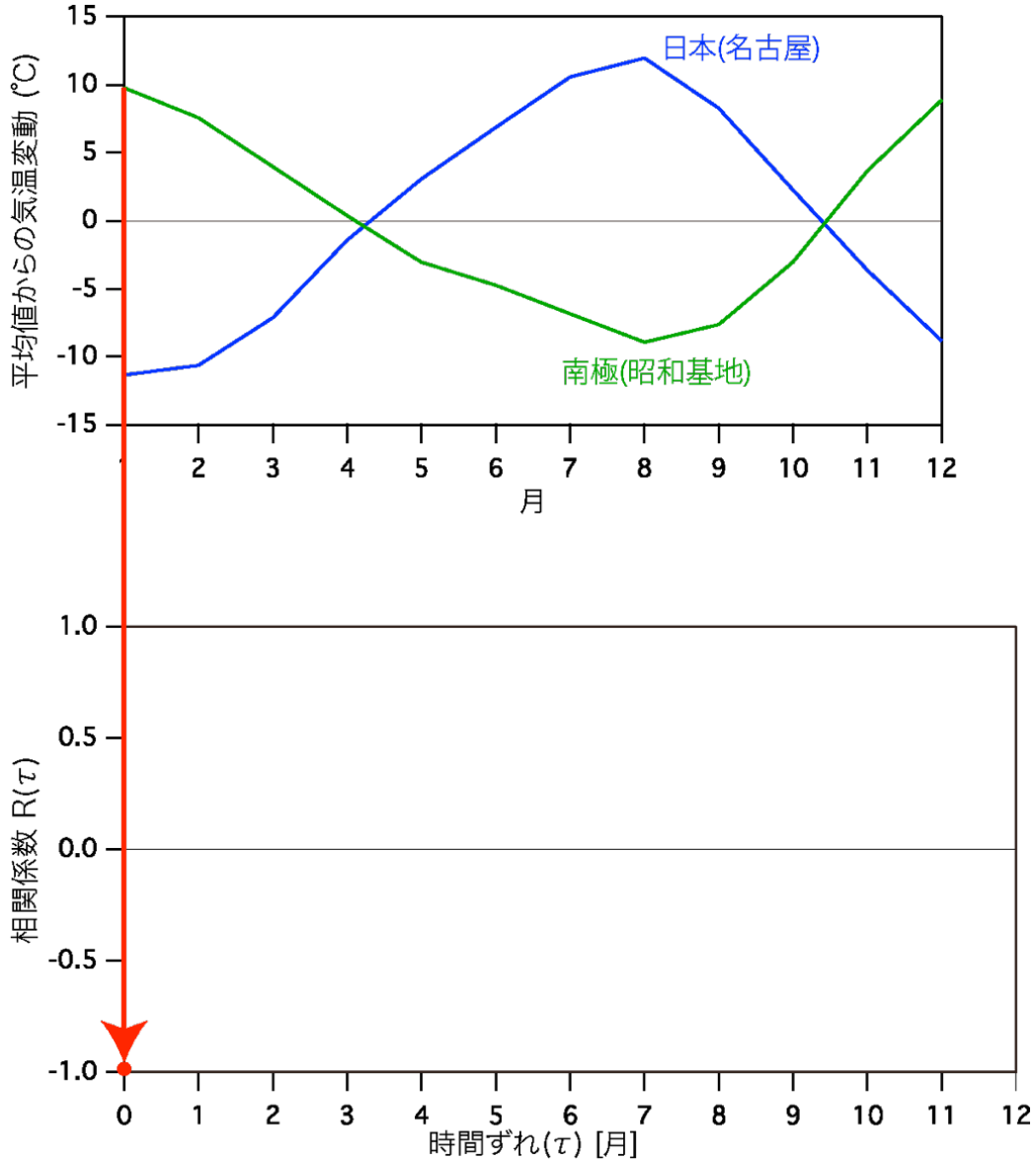
ずらす時間 τ を変えながら**相関係数を計算**し、
相関係数が最大となるτを見つければ、
2つの信号間の時間ずれを定量化できる

相互相関関数

ずらす時間 τ を変えながら f と g の相関係数(内積)を計算したもの

相互相関関数：$R_{fg}(\tau)$

↑ τ の関数

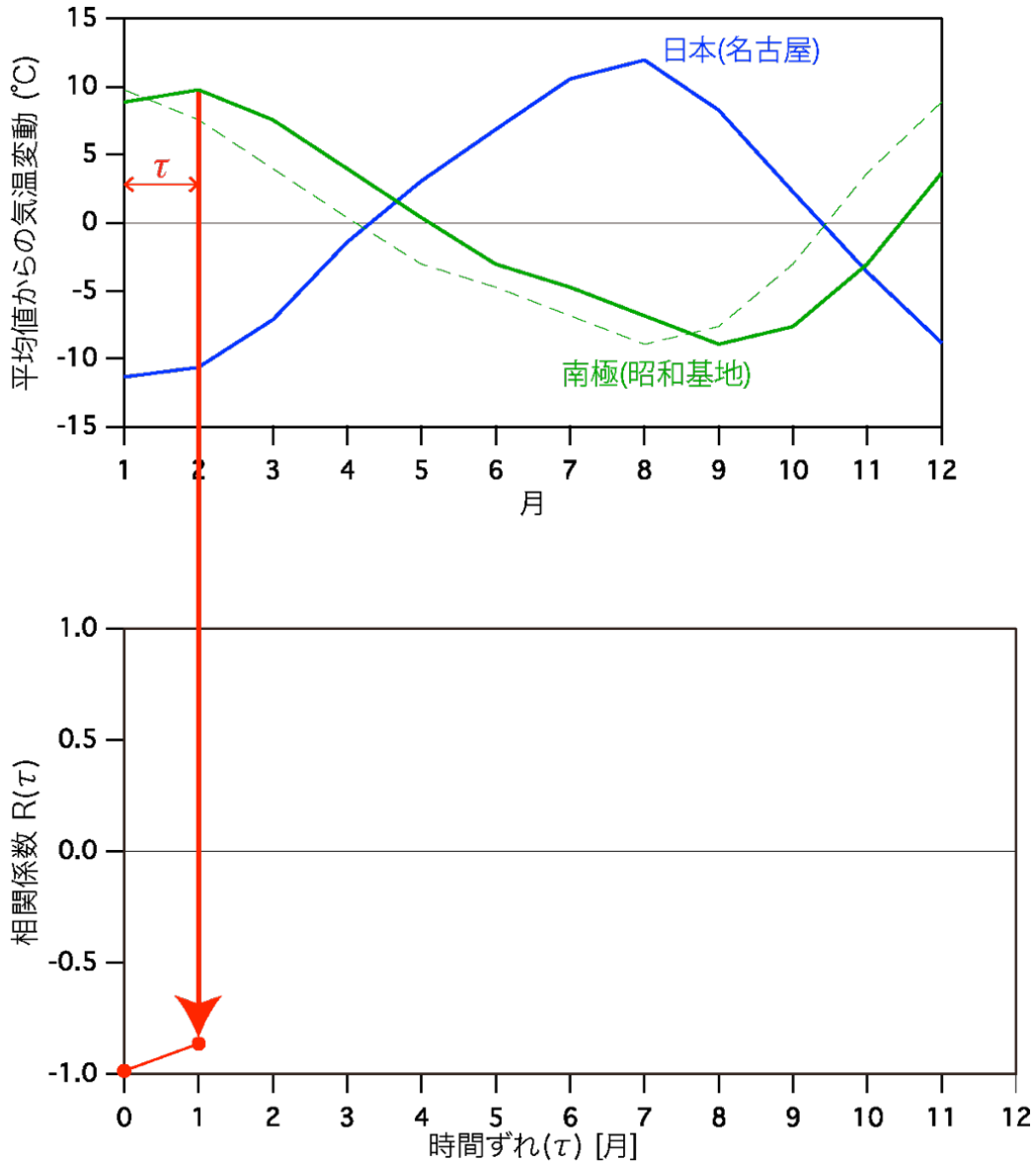


相互相関関数

ずらす時間 τ を変えながら f と g の相関係数(内積)を計算したもの

相互相関関数：$R_{fg}(\tau)$

↑ τ の関数

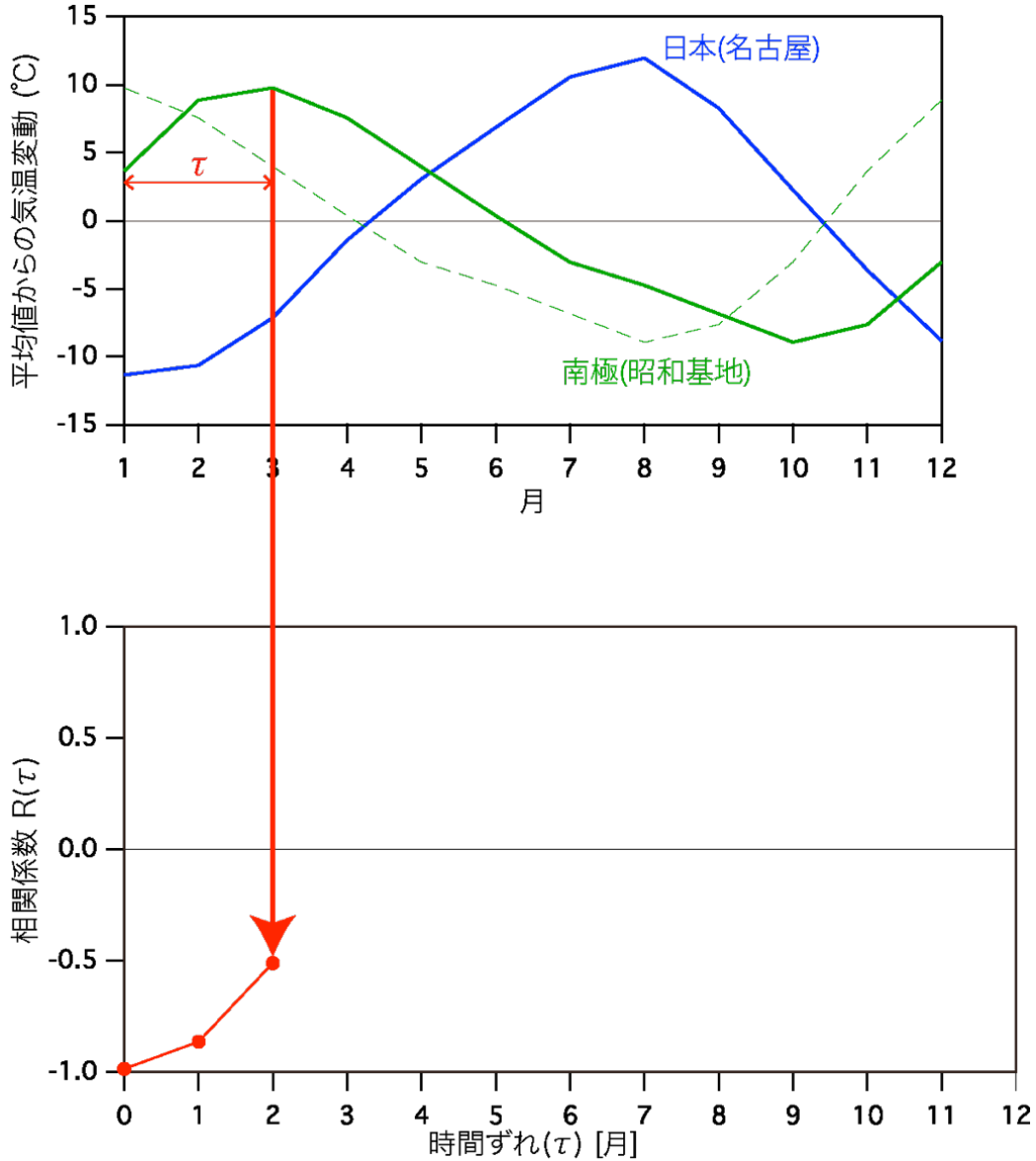


相互相関関数

ずらす時間 τ を変えながら f と g の相関係数(内積)を計算したもの

相互相関関数：$R_{fg}(\tau)$

↑ τ の関数

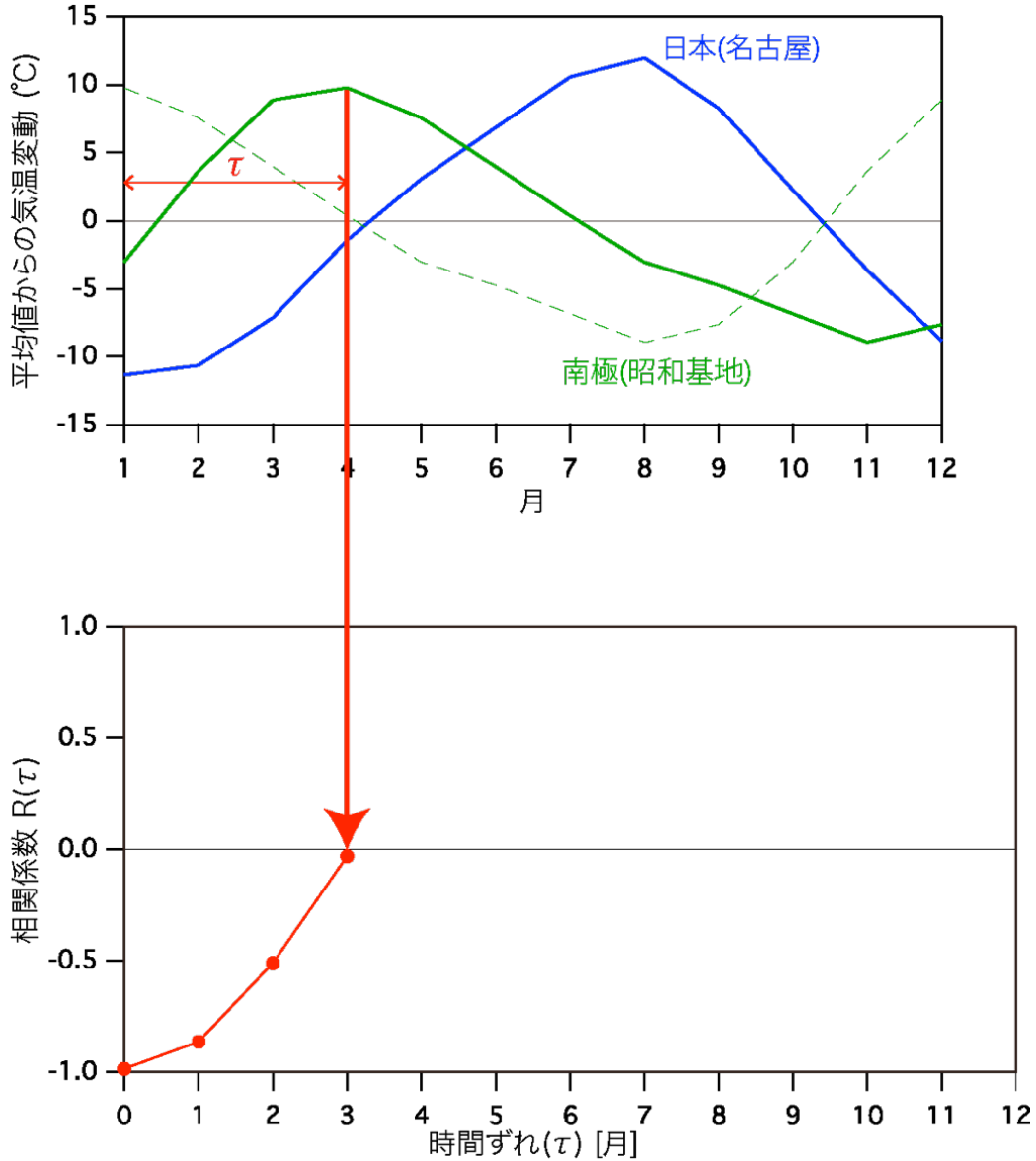


相互相関関数

ずらす時間 τ を変えながら f と g の相関係数(内積)を計算したもの

相互相関関数：$R_{fg}(\tau)$

↑ τ の関数

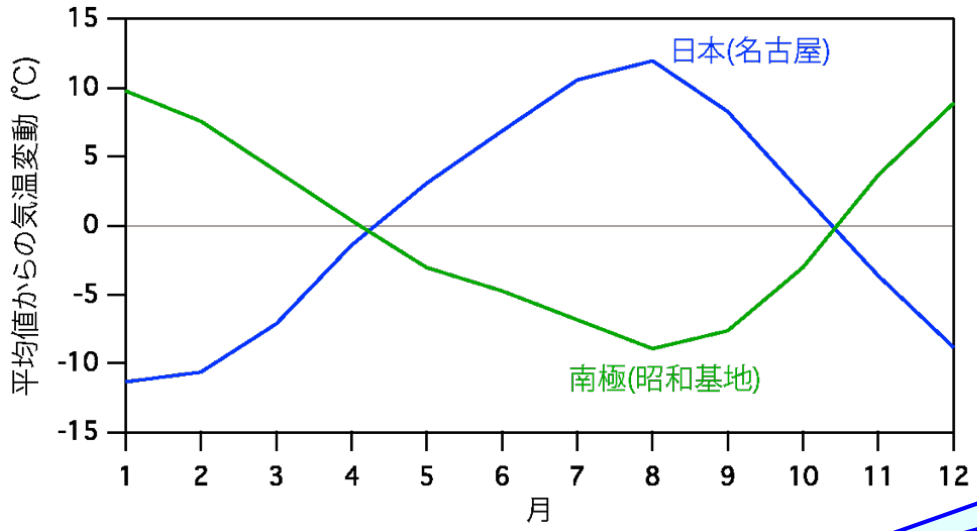


相互相関関数

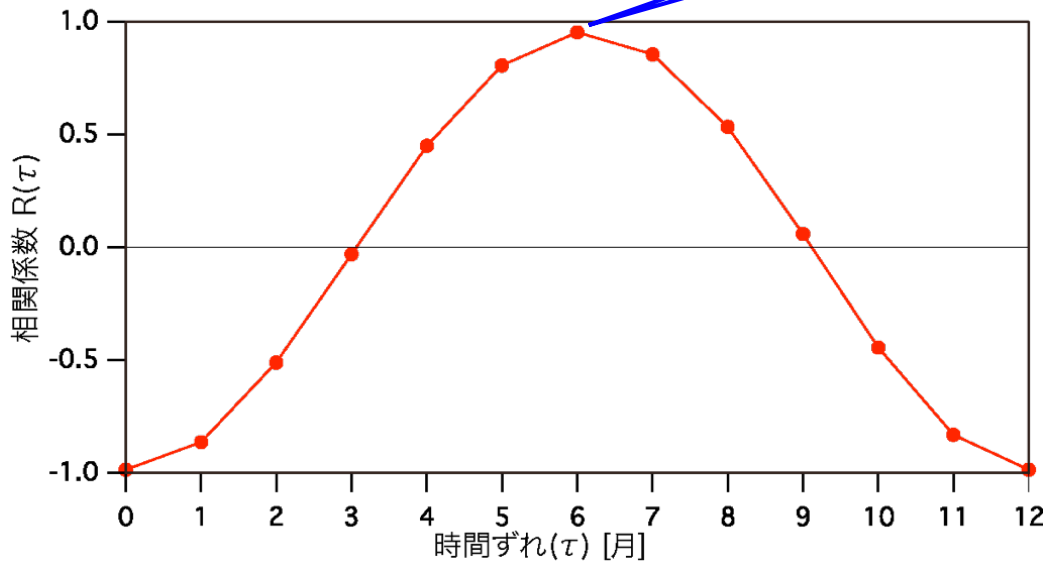
ずらす時間 τ を変えながら f と g の相関係数(内積)を計算したもの

相互相関関数：$R_{fg}(\tau)$

↑ τ の関数



名古屋と昭和基地では気候変動が6ヶ月ずれていることが、相互相関関数から明確になる



相互相関関数

ずらす時間 τ を変えながら $f(t)$ と $g(t)$ の相関係数(内積)を計算したもの

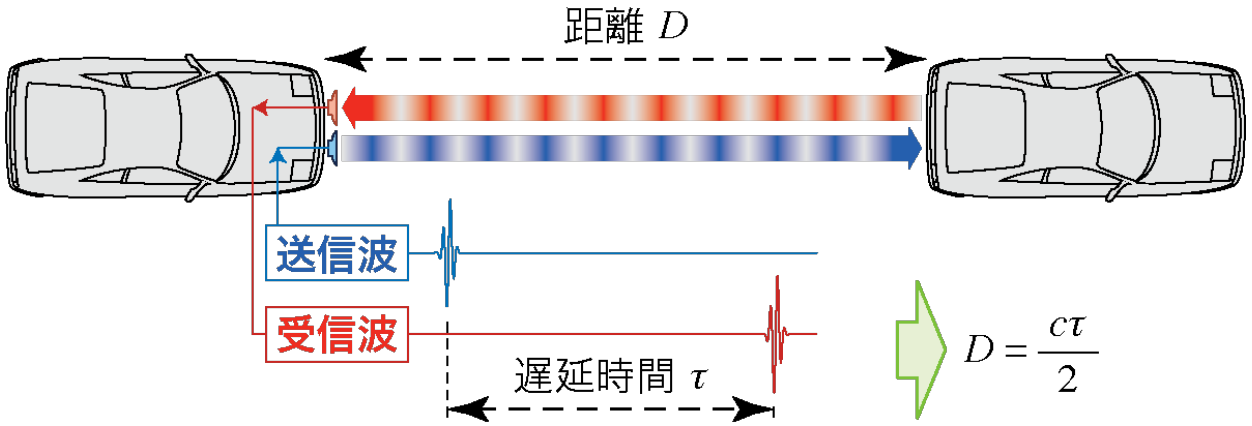
規格化しない場合： $R_{fg}(\tau) = < f(t),\, g(t+\tau) >$

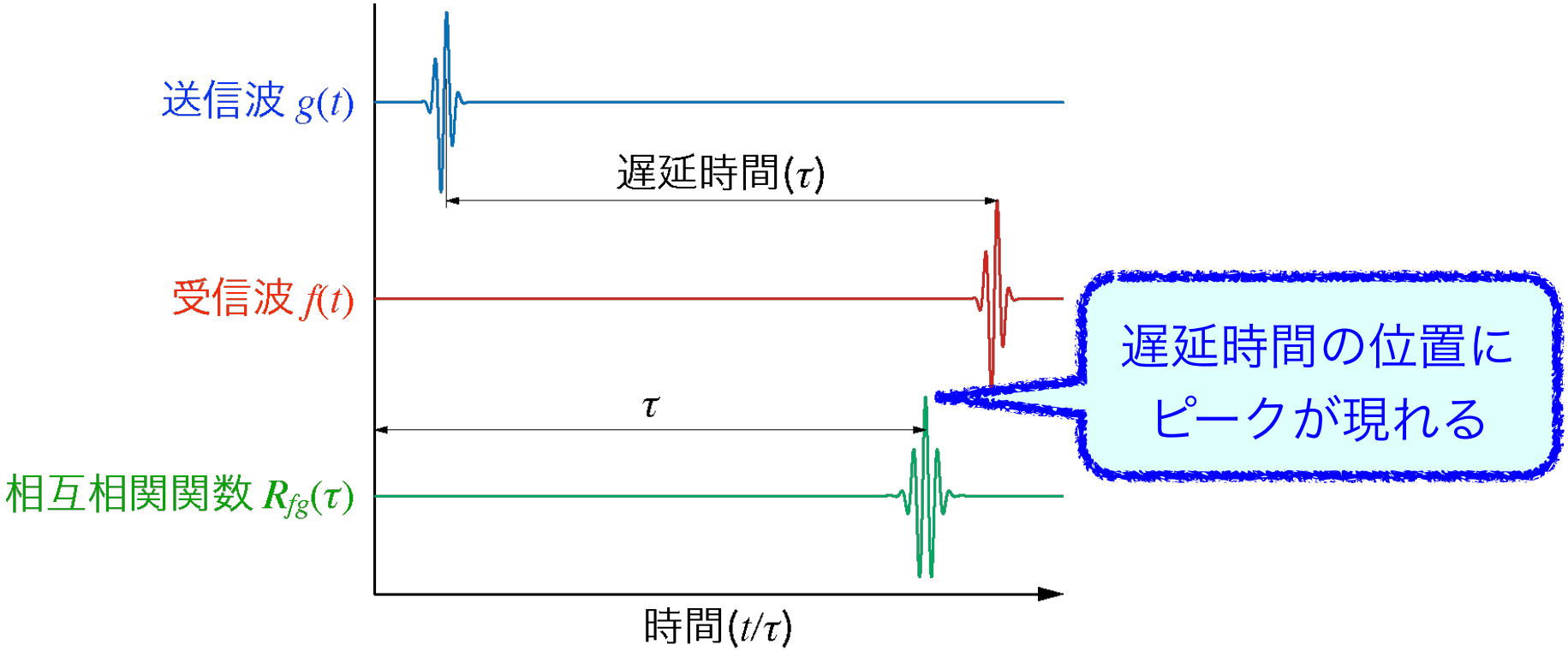
規格化する場合： $R_{fg}(\tau) = \dfrac{< f(t),\, g(t+\tau) >}{||f(t)||\,||g(t)||}$

相互相関関数を求めると、
2つの信号(関数)間の時間的あるいは
空間的なずれを求めることができる。

相互相関関数の応用例1

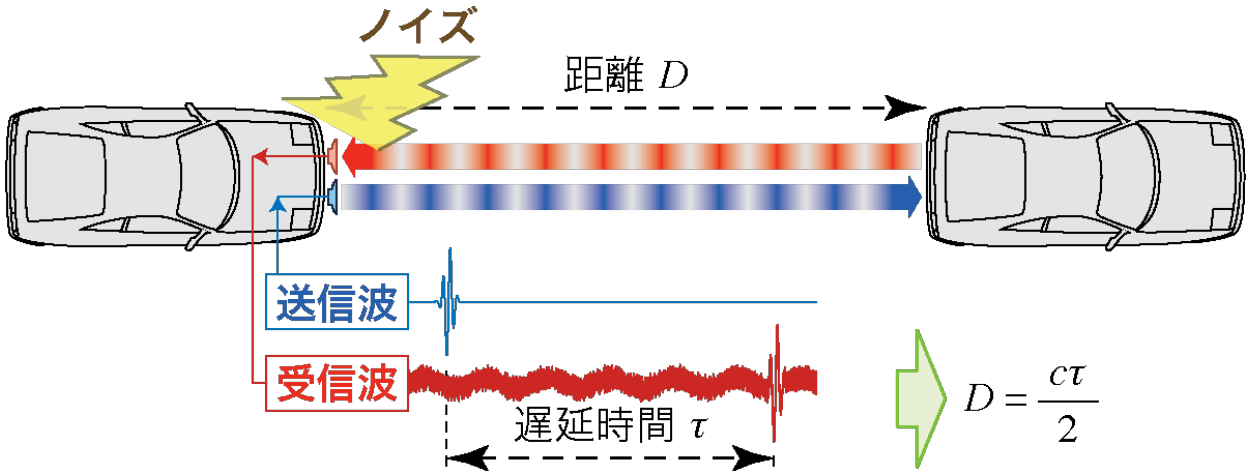
レーダーによる測距の例

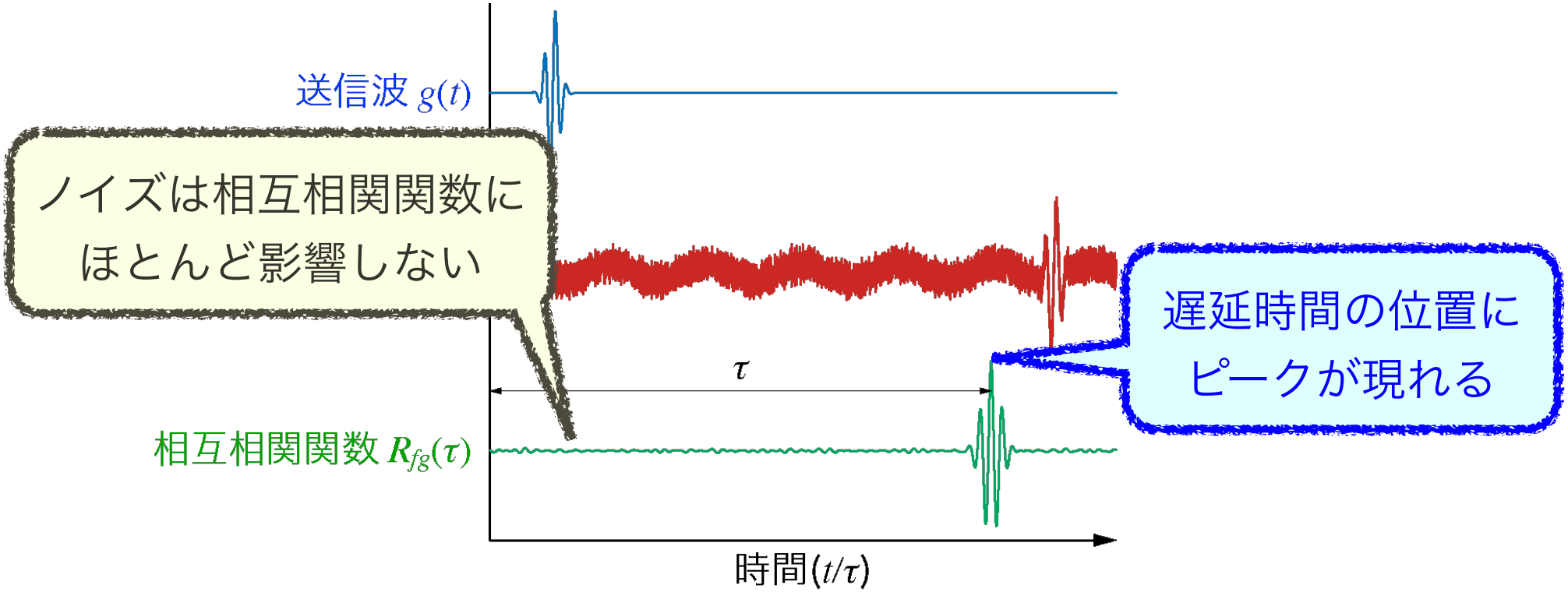




相互相関関数の応用例1

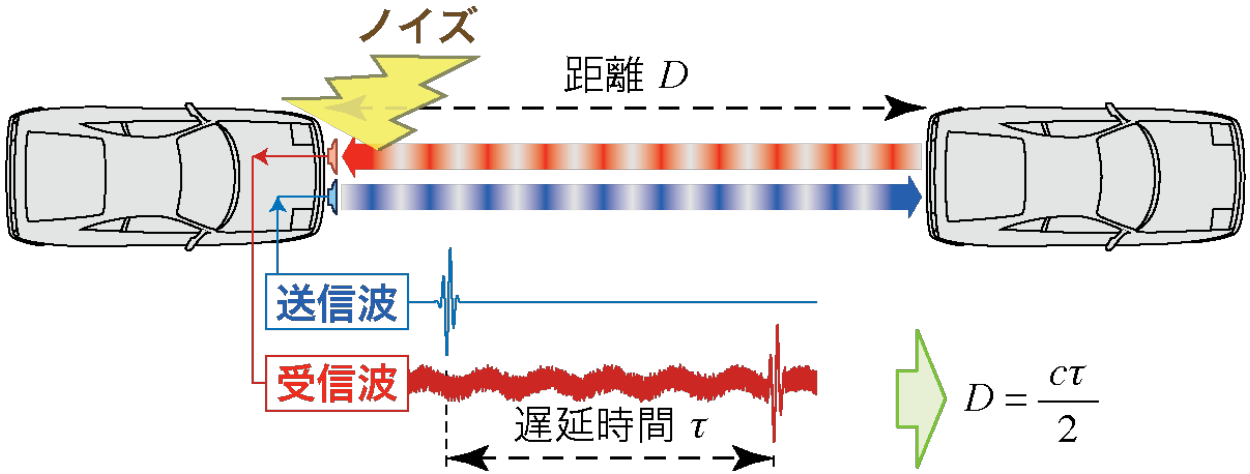
レーダーによる測距の例

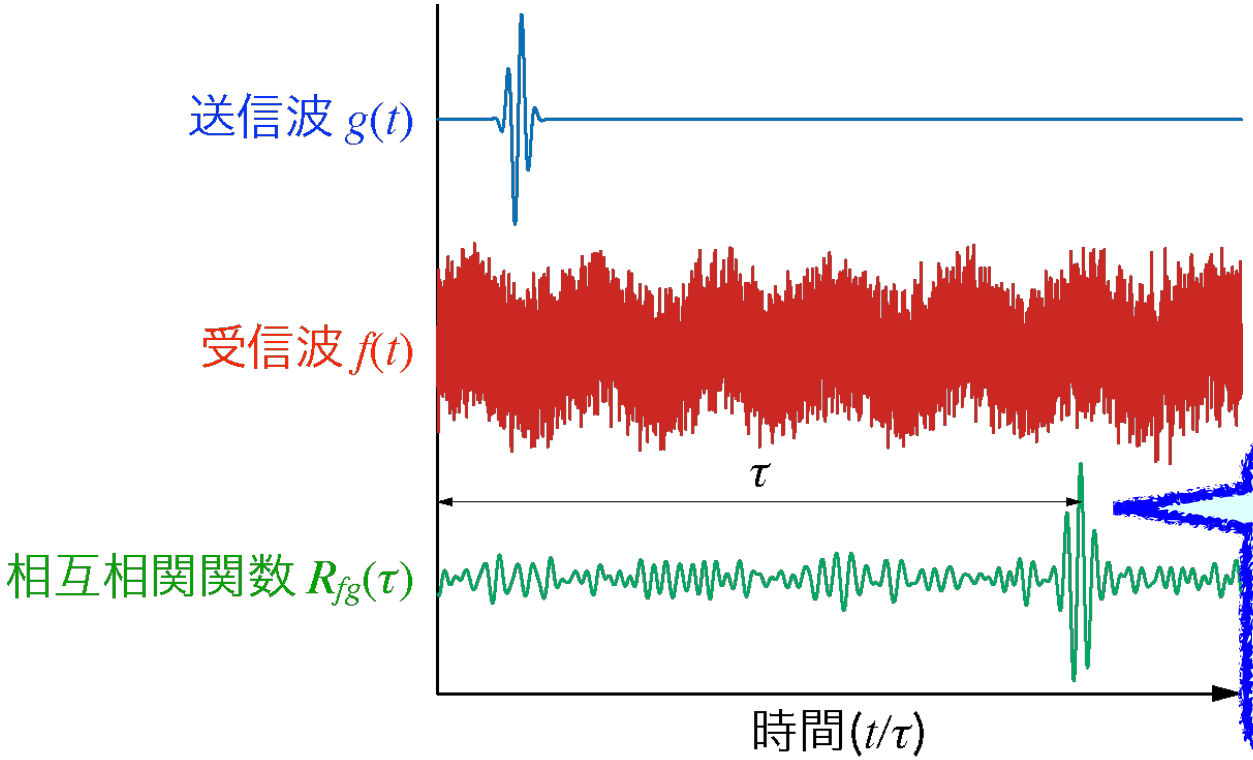




相互相関関数の応用例1

レーダーによる測距の例

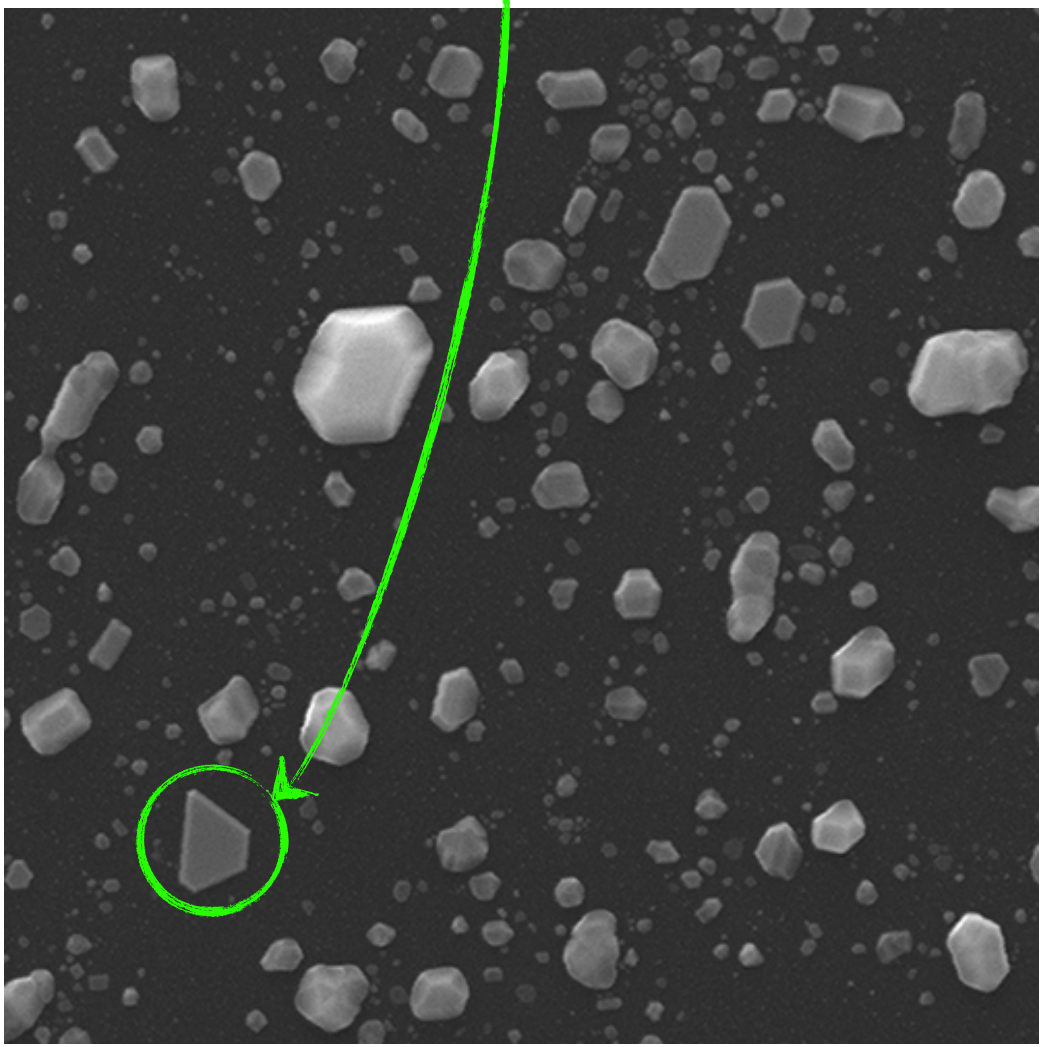




信号がほとんどノイズに埋もれていても、信号検出できる

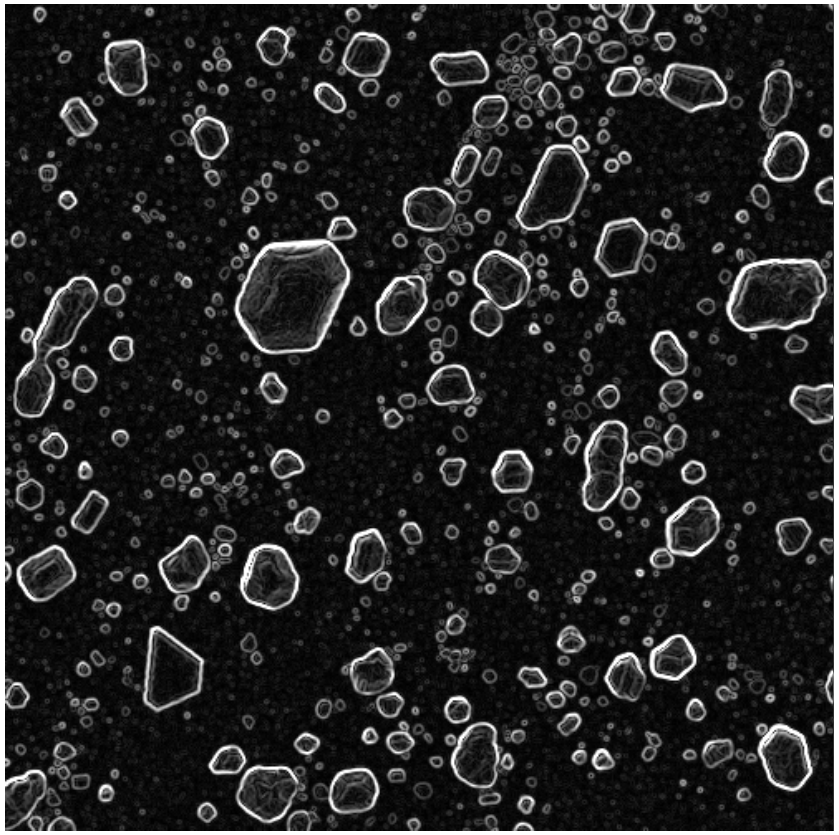
相互相関関数の応用例2

下の画像内の の位置を調べる

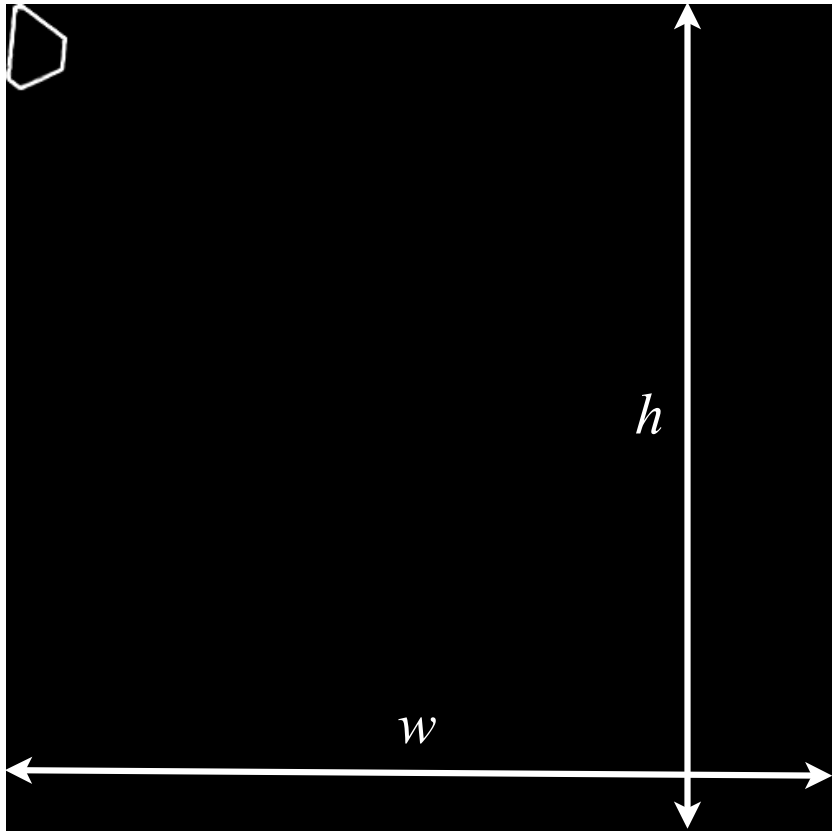


相互相関関数の応用例2

下の画像内の の位置を調べる



$f(x,y)$



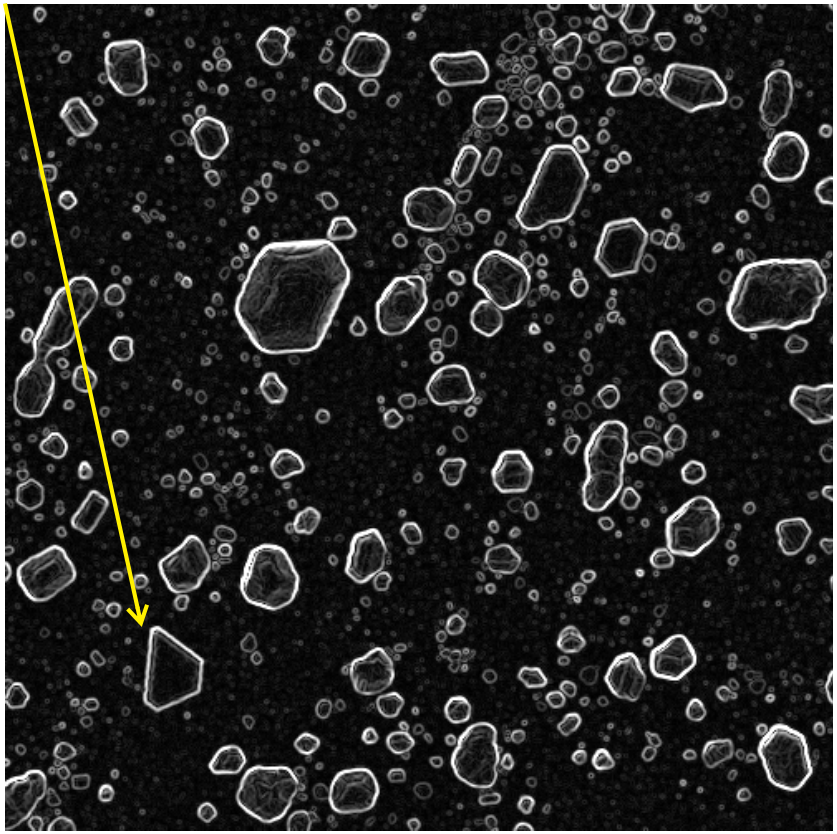
$g(x,y)$

形状比較するため、輪郭を抽出し、 2次元の相互相関関数を計算

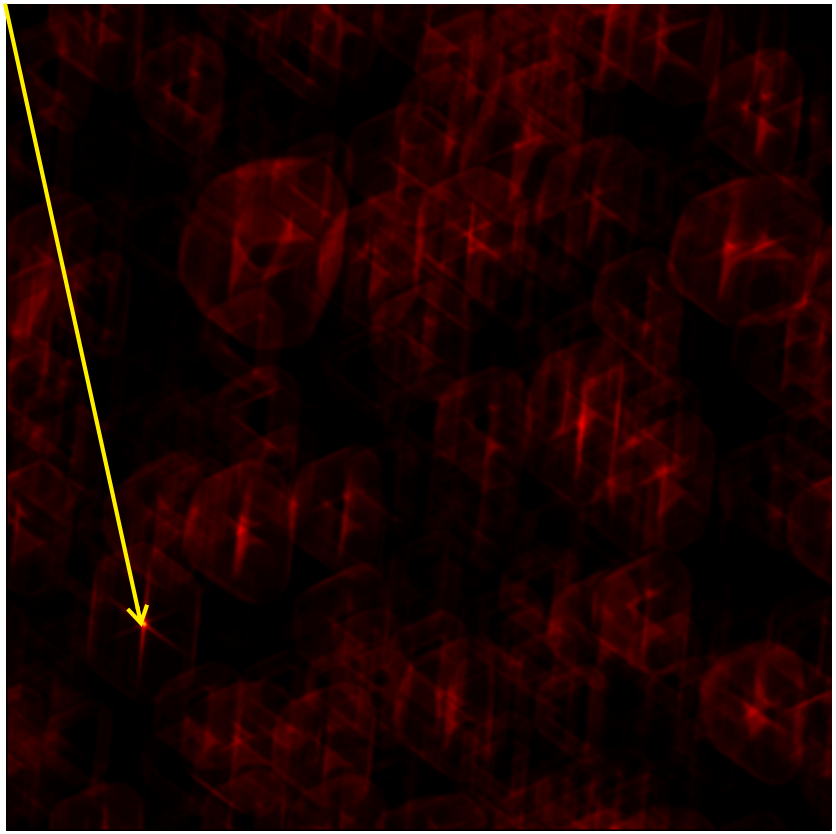
$$R_{fg}(\xi,\eta) = \frac{1}{wh}\int_0^h \int_0^w f(x,y)g(x+\xi,y+\eta)dx\,dy$$

相互相関関数の応用例2

下の画像内の の位置を調べる



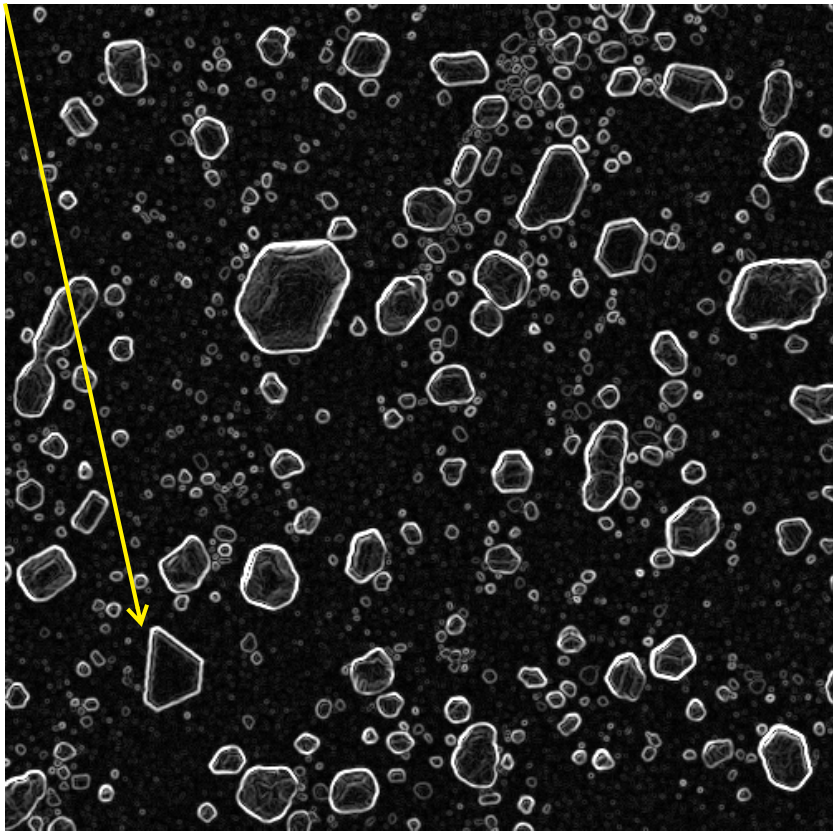
$f(x,y)$



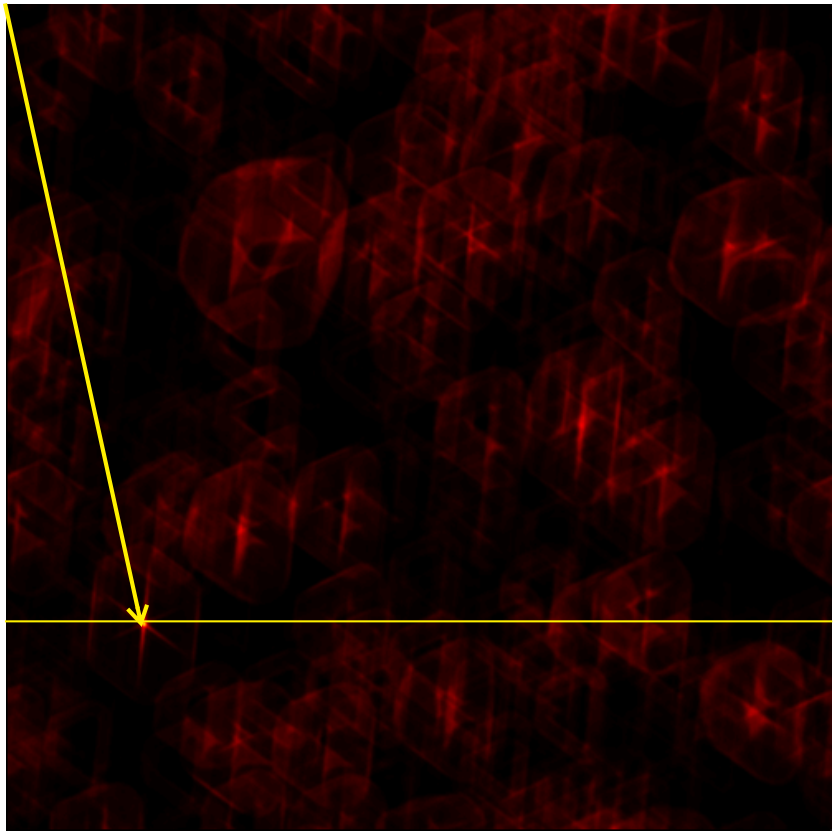
相互相関関数 $R_{fg}(\xi,\eta)$

相互相関関数の応用例2

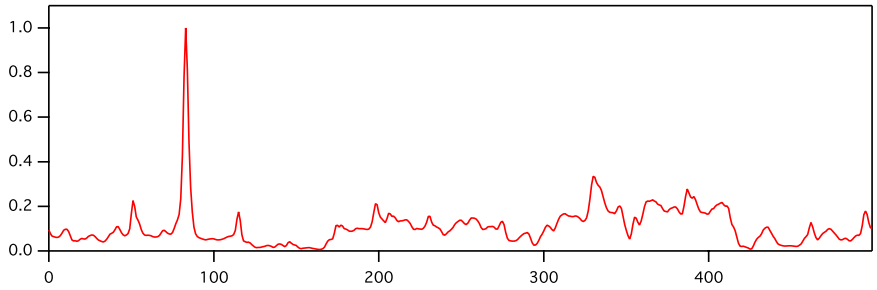
下の画像内の の位置を調べる



$f(x,y)$



相互相関関数 $R_{fg}(\xi,\eta)$



自己相関関数

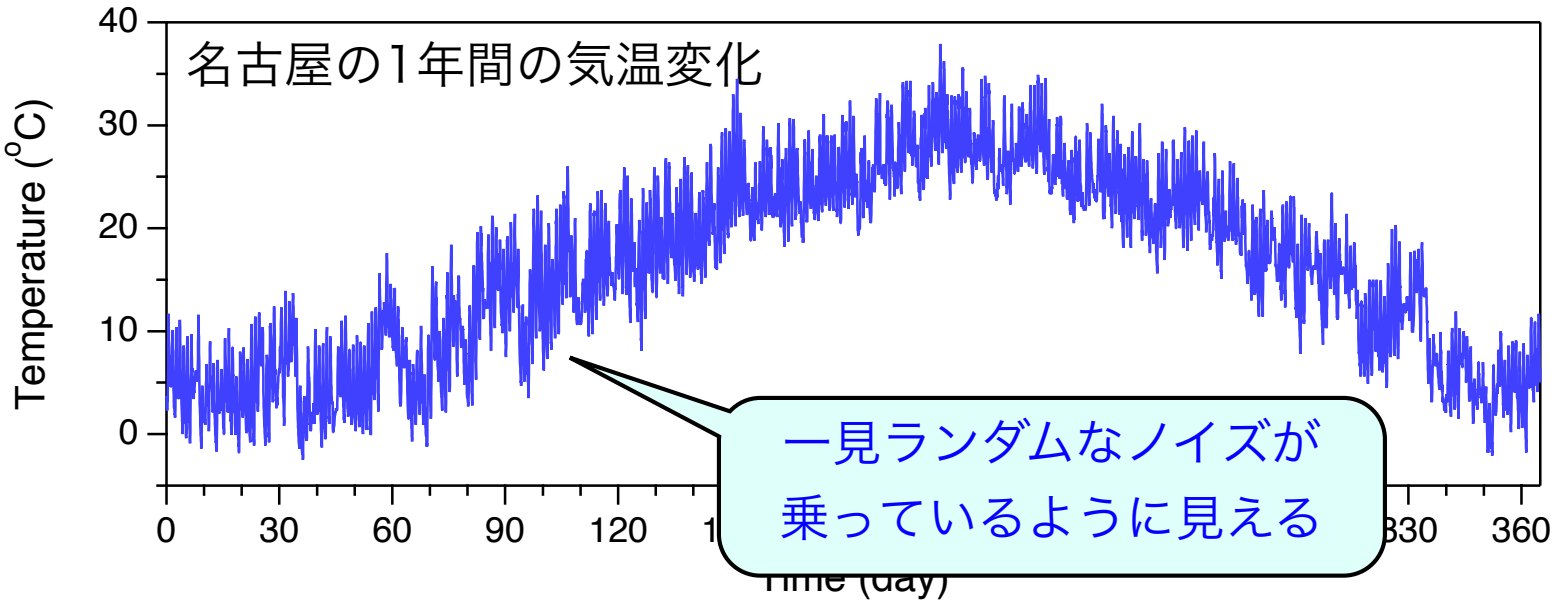
ずらす時間 τ を変えながら $f(t)$ と $f(t)$ の相関係数(内積)を計算したもの

規格化しない場合： $R_{ff}(\tau) = < f(t),\ f(t+\tau) >$

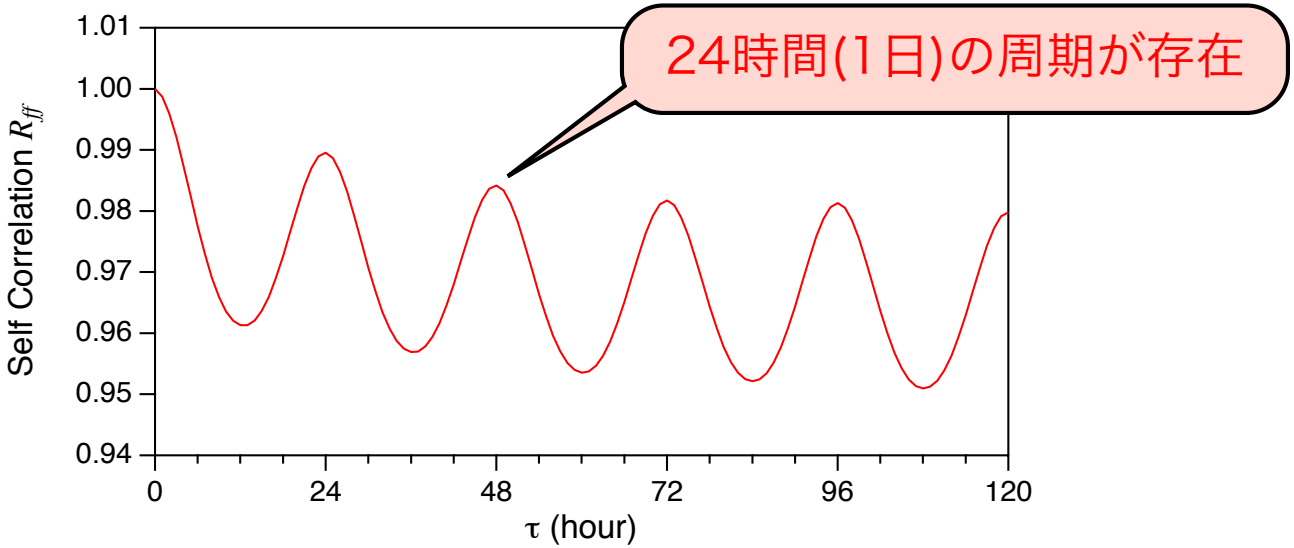
規格化する場合： $R_{ff}(\tau) = \dfrac{< f(t),\ f(t+\tau) >}{||f(t)||^2}$

自己相関関数を求めると、
信号(関数)に含まれている時間的あるいは
空間的な周期を得ることができる。

自己相関関数



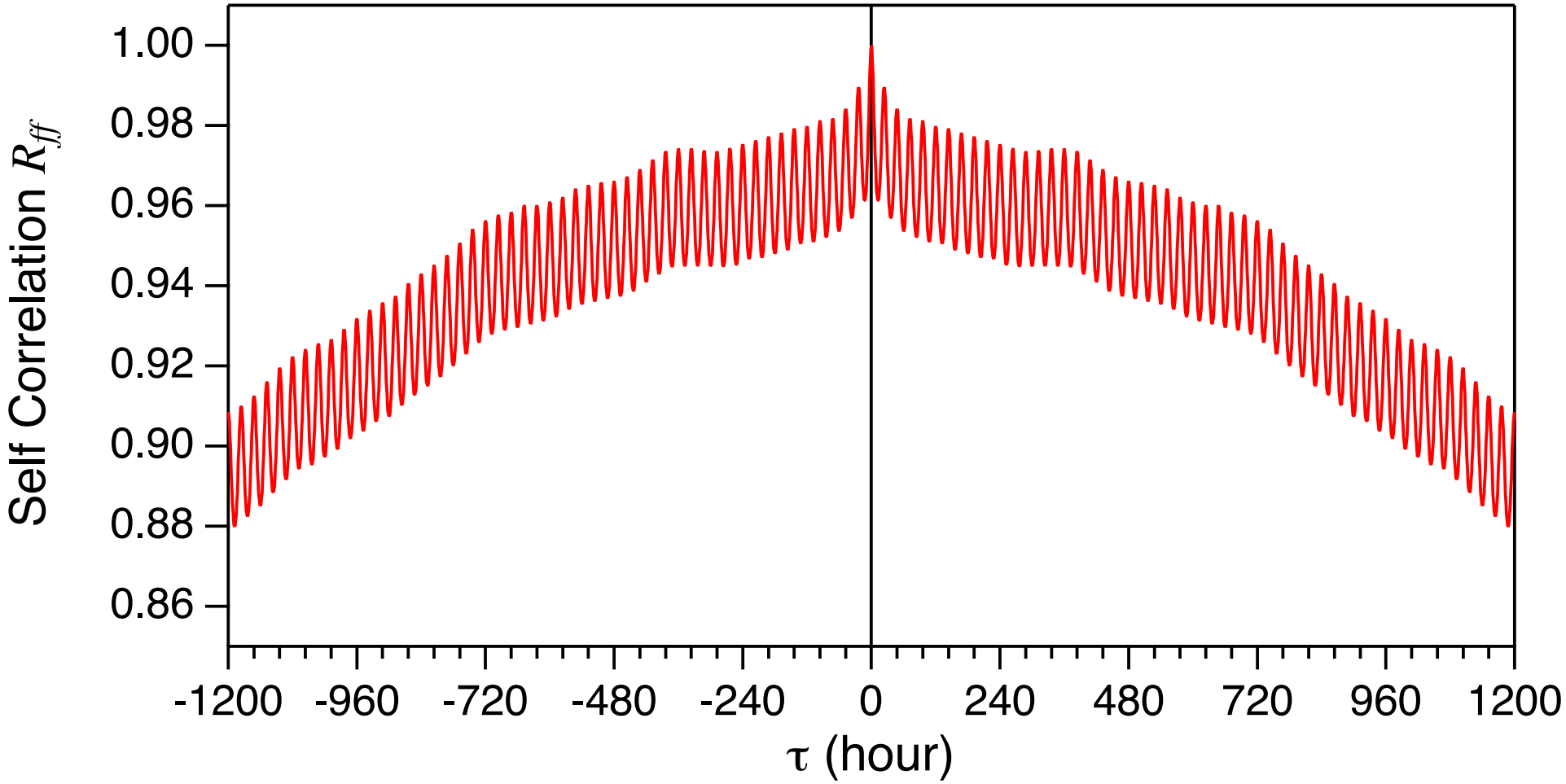
自己相関関数



自己相関関数の性質

原点(τ=0)対称性

原点(τ=0)で最大値



相互相関関数・自己相関関数

- **相互相関関数** $R_{fg}(\tau) = < f(t),\, g(t+\tau) >$
  二つの信号(関数)間の時間的あるいは空間的なずれが得られる。

- **自己相関関数** $R_{ff}(\tau) = < f(t),\, f(t+\tau) >$
  信号(関数)に含まれている時間的あるいは空間的な周期が得られる。

第5章 フーリエ級数展開

教科書 pp63–98

- 実フーリエ級数展開
- 複素フーリエ級数展開
- パーシバルの定理
- フーリエ級数展開の性質

正規直交関数系による関数の展開

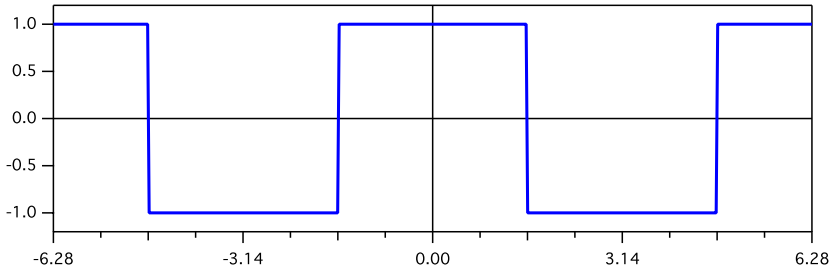
正規直交関数系： $\{\phi_1(t),\ \phi_2(t),\ \phi_3(t),\ \cdots\}$

$$\begin{cases} < \phi_i(t),\ \phi_j(t) >= \delta_{ij} \\ ||\phi_i(t)|| = 1 \end{cases}$$

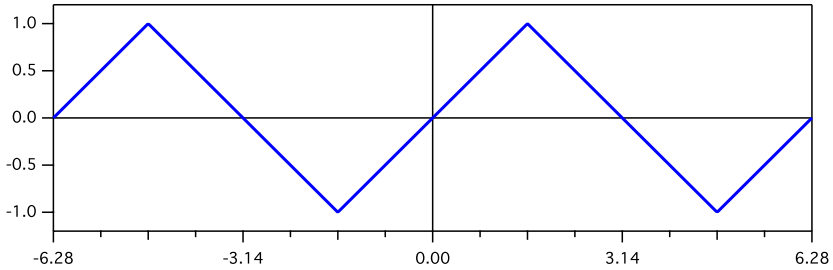
$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \phi_i(t)\,,\quad C_i =< f(t), \phi_i(t) >$$

直交関数系によって、任意の関数を
一次結合(=**級数**)に**展開**できる

矩形波：　$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4\sin(n\pi/2)}{n\pi}\cos(nt)$



三角波：　$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{8\sin(n\pi/2)}{n^2\pi^2}\sin(nt)$



周期関数を三角関数の和(三角級数)の形に展開すること
→ **フーリエ級数展開** という

フーリエ級数展開

角周波数 ω_0 の関数 $f(t)$ に対して、

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)\}$$

フーリエ係数：

$$a_k = \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t) \cos(k\omega_0 t)\, dt \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_k = \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t) \sin(k\omega_0 t)\, dt \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

係数の導出は後述

※ 周期 T と角周波数 ω_0 の関係は、$\omega_0 = 2\pi/T$

(周期 T=2π のとき ω_0=1)

フーリエ係数を求めることで、**任意の周期関数**を単純な周期関数(sin, cos)の集まりとして解析できる

↑**スペクトル解析・フーリエ解析**という

対象が周期関数でないときは、繰り返し終端条件・折り返し終端条件などを用いて周期化

フーリエ級数展開

角周波数 ω_0 の関数 $f(t)$ に対して、

交流成分

直流成分

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)\}$$

cos, sin は実数関数なので、
実フーリエ級数展開、
実フーリエ係数ともいう

$$\begin{cases} k = 1 & \rightarrow \text{基本波／基本調波} \\ k = 2 & \rightarrow \text{第2高調波} \\ \vdots & \\ k & \rightarrow \text{第}k\text{高調波} \end{cases}$$

フーリエ係数：

$$a_k = \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t) \cos(k\omega_0 t)\, dt \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_k = \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t) \sin(k\omega_0 t)\, dt \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

※ 周期 T と角周波数 ω_0 の関係は、$\omega_0 = 2\pi/T$

(周期 T=2π のとき ω_0=1)

フーリエ係数の導出

正規直交関数系 $\left\{1, \sqrt{2}\cos(\omega_0 t), \sqrt{2}\sin(\omega_0 t), \sqrt{2}\cos(2\omega_0 t), \sqrt{2}\sin(2\omega_0 t), \cdots\right\}$

を用いて、関数 $f(t)$ を区間 $[-\pi/\omega_0\ ,\ \pi/\omega_0]$ で展開し、

$$f(t) = \alpha_0\{1\} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\alpha_k \cdot \sqrt{2}\cos(k\omega_0 t) + \beta_k \cdot \sqrt{2}\sin(k\omega_0 t)\right\}$$

と書けるとき、係数 α_0、α_k、β_k はそれぞれ、

$$\alpha_0 =< f(t), 1 >= \frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\,dt = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\underbrace{\cos(0\omega_0 t)}_{=1}\,dt$$

$$\alpha_k =< f(t), \sqrt{2}\cos(k\omega_0 t) >= \frac{\sqrt{2}\omega_0}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\cos(k\omega_0 t)\,dt$$

$$\beta_k =< f(t), \sqrt{2}\sin(k\omega_0 t) >= \frac{\sqrt{2}\omega_0}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\sin(k\omega_0 t)\,dt$$

フーリエ係数の導出

正規直交関数系 $\left\{1, \sqrt{2}\cos(\omega_0 t), \sqrt{2}\sin(\omega_0 t), \sqrt{2}\cos(2\omega_0 t), \sqrt{2}\sin(2\omega_0 t), \cdots\right\}$

を用いて、関数 $f(t)$ を区間 $[-\pi/\omega_0\ ,\ \pi/\omega_0]$ で展開し、

$$f(t) = \alpha_0\{1\} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\alpha_k \cdot \sqrt{2}\cos(k\omega_0 t) + \beta_k \cdot \sqrt{2}\sin(k\omega_0 t)\right\}$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)\right\}$$ と比較すると、

$$\alpha_0 =< f(t), 1 >= \frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\,dt = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\cos(0\omega_0 t)\,dt$$

$$\alpha_k =< f(t), \sqrt{2}\cos(k\omega_0 t) >= \frac{\sqrt{2}\omega_0}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\cos(k\omega_0 t)\,dt$$

$$\beta_k =< f(t), \sqrt{2}\sin(k\omega_0 t) >= \frac{\sqrt{2}\omega_0}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\sin(k\omega_0 t)\,dt$$

フーリエ係数の導出

$$f(t) = \alpha_0\{1\} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\alpha_k \cdot \sqrt{2}\cos(k\omega_0 t) + \beta_k \cdot \sqrt{2}\sin(k\omega_0 t)\right\}$$

$$\alpha_0 =< f(t), 1 >= \frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\,dt = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\cos(0\omega_0 t)\,dt$$

$$\alpha_k =< f(t), \sqrt{2}\cos(k\omega_0 t) >= \frac{\sqrt{2}\omega_0}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\cos(k\omega_0 t)\,dt$$

$$\beta_k =< f(t), \sqrt{2}\sin(k\omega_0 t) >= \frac{\sqrt{2}\omega_0}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\sin(k\omega_0 t)\,dt$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos(k\omega_0 t) + b_k\sin(k\omega_0 t)\}$$

$$a_k = \sqrt{2}\alpha_k = \frac{\omega_0}{\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\cos(k\omega_0 t)\,dt \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_k = \sqrt{2}\beta_k = \frac{\omega_0}{\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\sin(k\omega_0 t)\,dt \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

フーリエ級数展開の例(ノコギリ波)

ノコギリ波：$f(t) = t \quad [-\pi, \pi] \ \ldots \ \omega_0 = 1$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos(kt)\,dt = \frac{1}{\pi}\left\{\left[t\frac{\sin(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(kt)}{k}dt\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[t\frac{\sin(kt)}{k} + \frac{\cos(kt)}{k^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\cos(k\pi)}{k^2} - \frac{\cos(-k\pi)}{k^2}\right\} = 0$$

微分して簡単になる方を $v(t)$ とする。

今の場合は、$v(t) = t,\ v'(t) = 1$

部分積分の公式

$$\int \frac{du(t)}{dt}v(t)\,dt = u(t)v(t) - \int u(t)\frac{dv(t)}{dt}\,dt$$

フーリエ級数展開の例(ノコギリ波)

ノコギリ波：$f(t) = t \quad [-\pi, \pi] \ \ldots \ \omega_0 = 1$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos(kt)\,dt = \frac{1}{\pi}\left\{\left[t\frac{\sin(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(kt)}{k}dt\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[t\frac{\sin(kt)}{k} + \frac{\cos(kt)}{k^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\cos(k\pi)}{k^2} - \frac{\cos(-k\pi)}{k^2}\right\} = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(kt)\,dt = \frac{1}{\pi}\left\{\left[-t\frac{\cos(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{\cos(kt)}{k}dt\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-t\frac{\cos(kt)}{k} + \frac{\sin(kt)}{k^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left\{-\pi\frac{\cos(k\pi)}{k} - \pi\frac{\cos(-k\pi)}{k}\right\}$$

$$= -\frac{2}{k}\cos(k\pi)$$

部分積分の公式

$$\int \frac{du(t)}{dt}v(t)\,dt = u(t)v(t) - \int u(t)\frac{dv(t)}{dt}\,dt$$

フーリエ級数展開の例(ノコギリ波)

ノコギリ波：$f(t) = t \quad [-\pi, \pi] \ \ldots \ \omega_0 = 1$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos(kt)\,dt = \frac{1}{\pi}\left\{\left[t\frac{\sin(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(kt)}{k}dt\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[t\frac{\sin(kt)}{k} + \frac{\cos(kt)}{k^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\cos(k\pi)}{k^2} - \frac{\cos(-k\pi)}{k^2}\right\} = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(kt)\,dt = \frac{1}{\pi}\left\{\left[-t\frac{\cos(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{\cos(kt)}{k}dt\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-t\frac{\cos(kt)}{k} + \frac{\sin(kt)}{k^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left\{-\pi\frac{\cos(k\pi)}{k} - \pi\frac{\cos(-k\pi)}{k}\right\}$$

$$= -\frac{2}{k}\cos(k\pi)$$

$k = 1, 2, 3, 4, \ldots$ で、$-1, 1, -1, 1, \ldots$

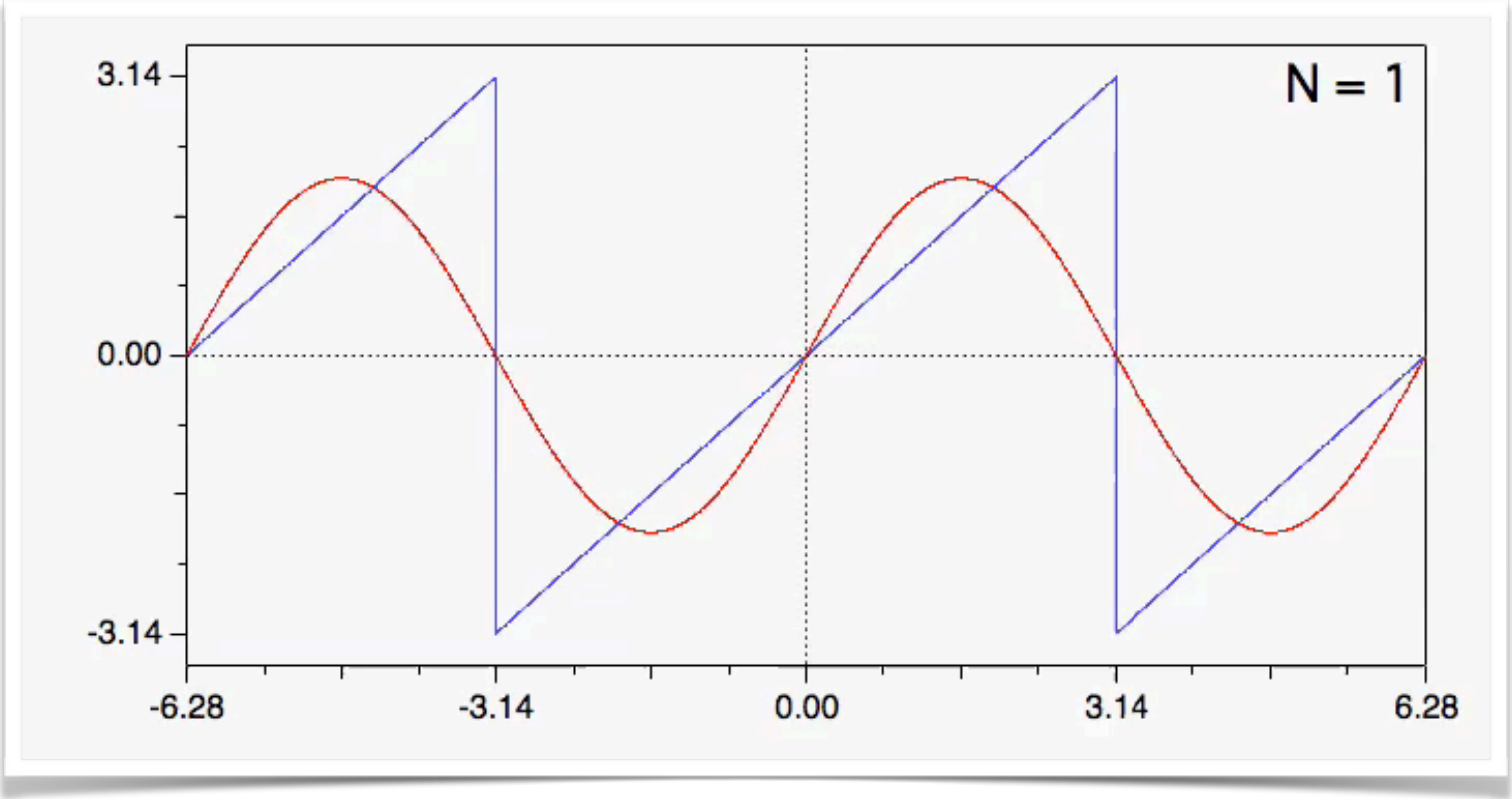
$$f(t) = 2\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t - \frac{1}{4}\sin 4t + \cdots\right)$$

フーリエ級数展開の例(ノコギリ波)

ノコギリ波：$f(t) = t \quad [-\pi, \pi]$

$$f(t) = 2\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t - \frac{1}{4}\sin 4t + \cdots\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} -\cos(k\pi)\frac{2}{k}\sin kt$$



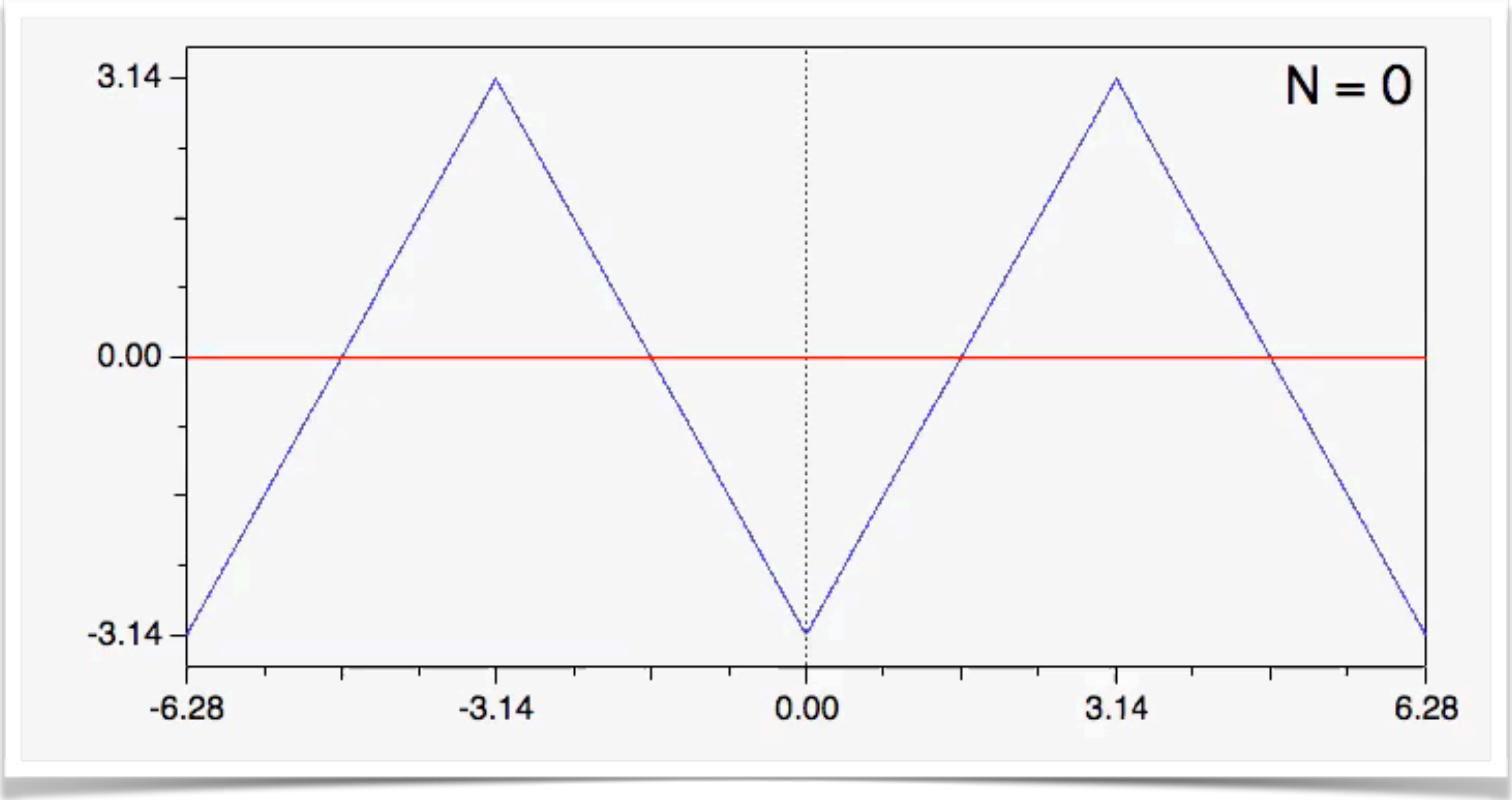
フーリエ級数展開の例(三角波)

三角波：$f(t) = |2t| - \pi \quad [-\pi, \pi]$

$$f(t) = -\frac{8}{\pi}\left(\cos t + \frac{1}{9}\cos 3t + \frac{1}{25}\cos 5t + \cdots\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} -\left|\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right| \frac{8}{\pi k^2}\cos kt$$

$k = 1, 2, 3, 4, \ldots$ で、$1, 0, 1, 0, \ldots$



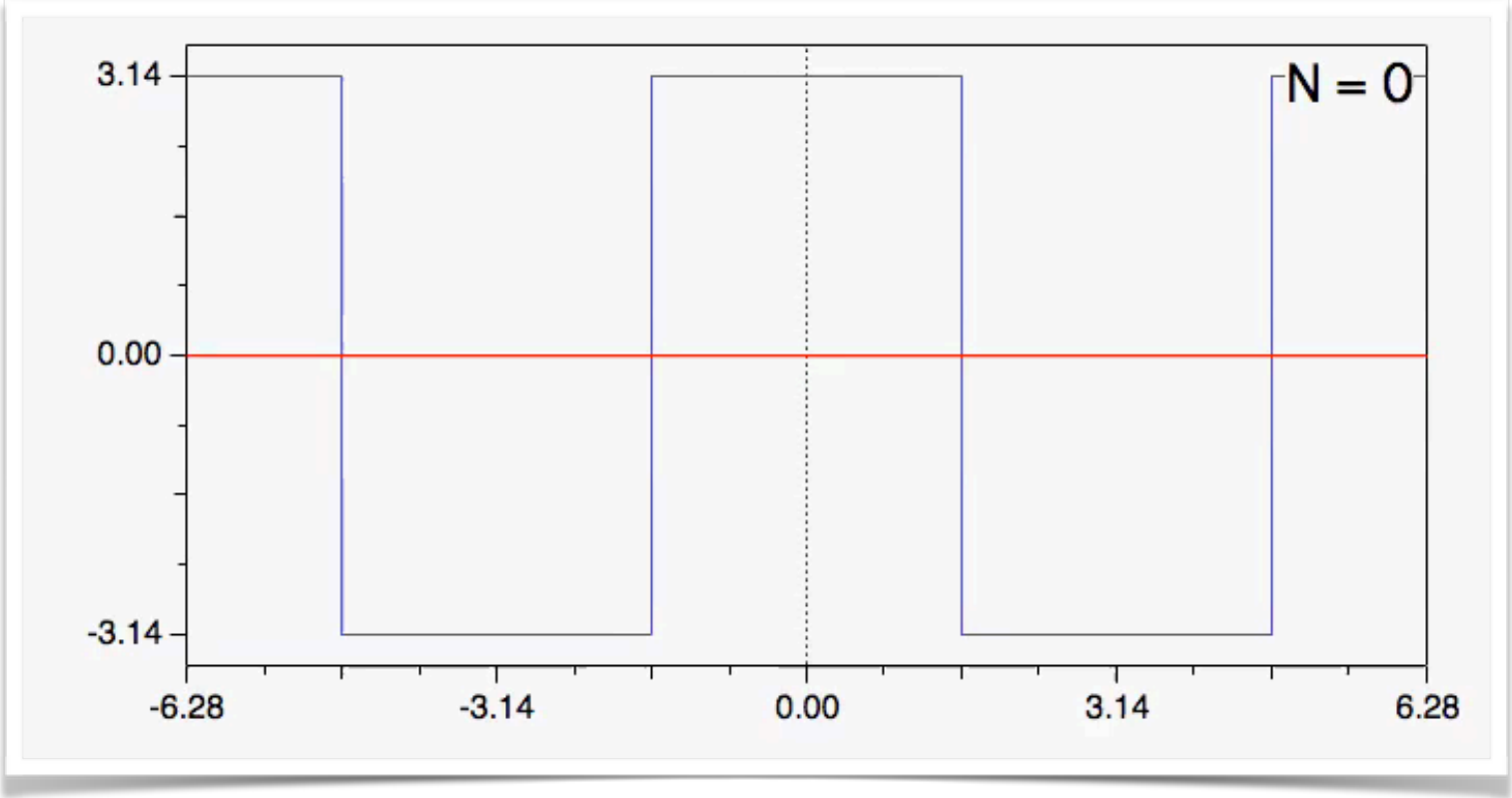
フーリエ級数展開の例(矩形波)

矩形波：$f(t) = -\pi\ (|t| > \pi/2),\ \pi\ (|t| < \pi/2) \quad [-\pi, \pi]$

$$f(t) = 4\left(\cos t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{1}{5}\cos 5t - \frac{1}{7}\cos 7t + \cdots\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \frac{4}{k} \cos kt$$

$k = 1, 2, 3, 4,\ldots$ で、$1, 0, -1, 0,\ldots$



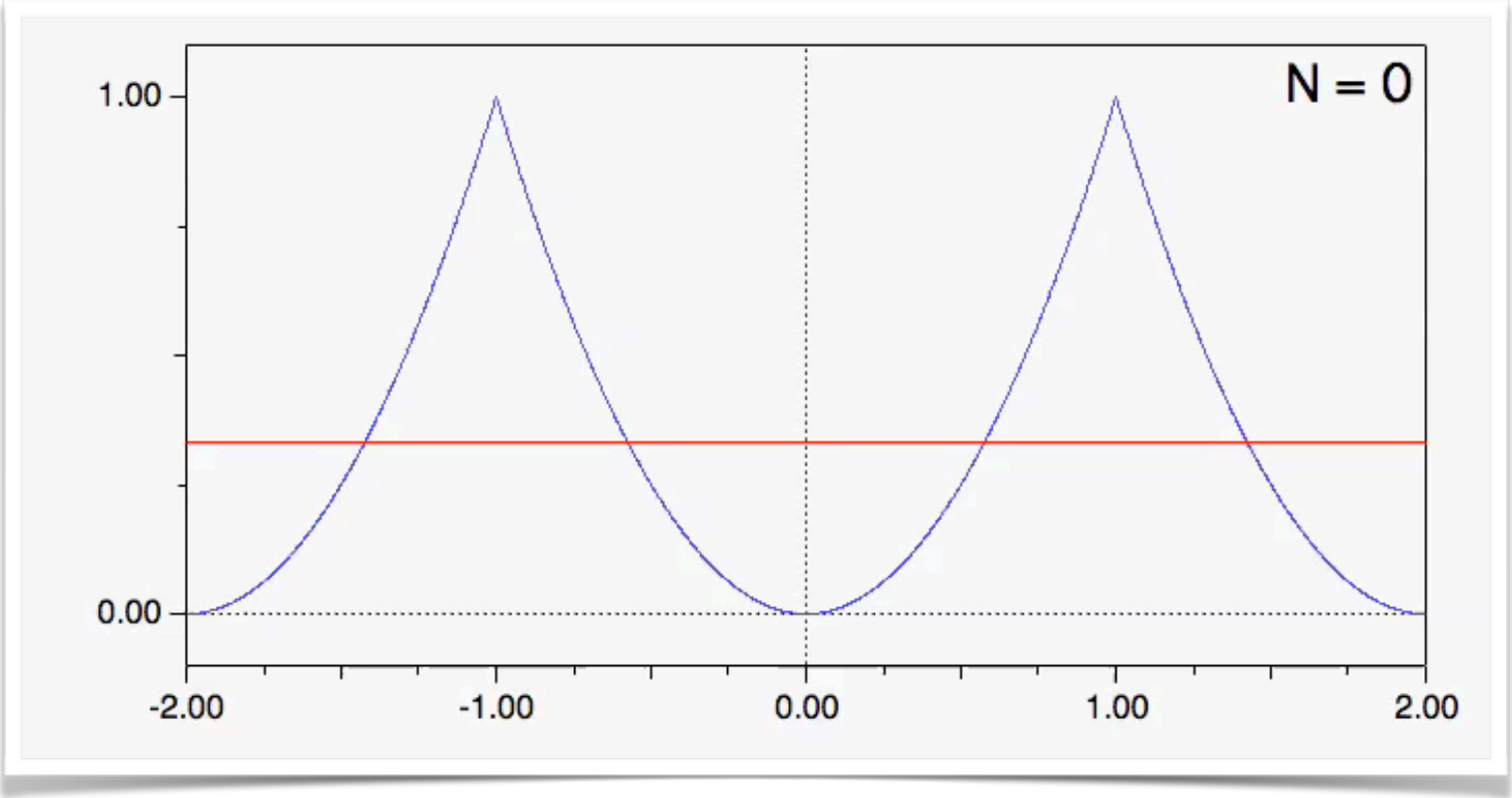
フーリエ級数展開の例(二次関数)

二次関数：$f(t) = t^2 \quad [-1, 1]$

$$f(t) = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\cos(\pi t) + \frac{4}{4\pi^2}\cos(2\pi t) - \frac{4}{9\pi^2}\cos(3\pi t) + \cdots$$

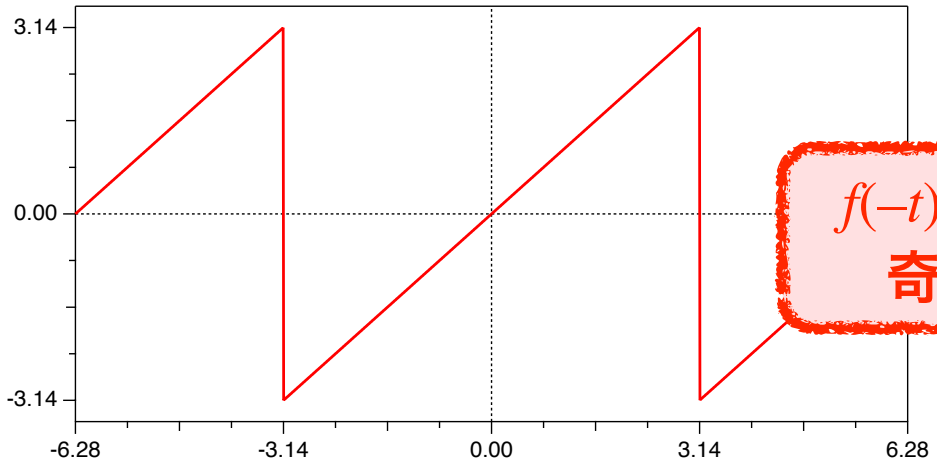
$$= \frac{1}{3} + \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\cos(\pi k)\frac{4}{\pi^2 k^2}\cos(\pi k t)$$

$k = 1, 2, 3, 4,\ldots$ で、$-1, 1, -1, 1,\ldots$



偶関数・奇関数とフーリエ級数展開

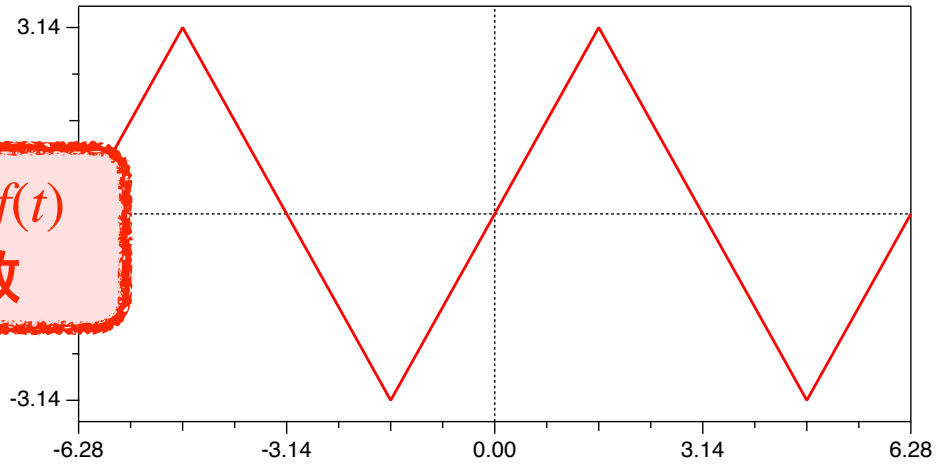
$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} -\cos(k\pi)\frac{2}{k}\sin kt$$



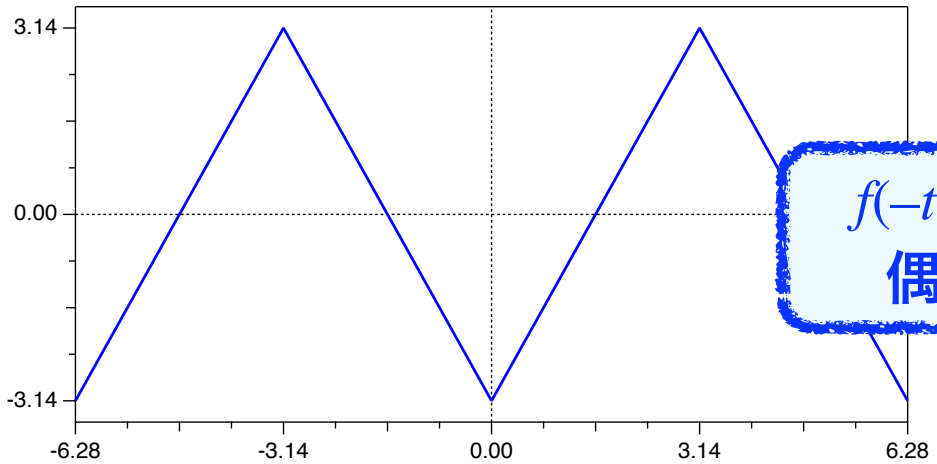
$f(-t) = -f(t)$

奇関数

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\frac{8}{\pi k^2}\sin kt$$



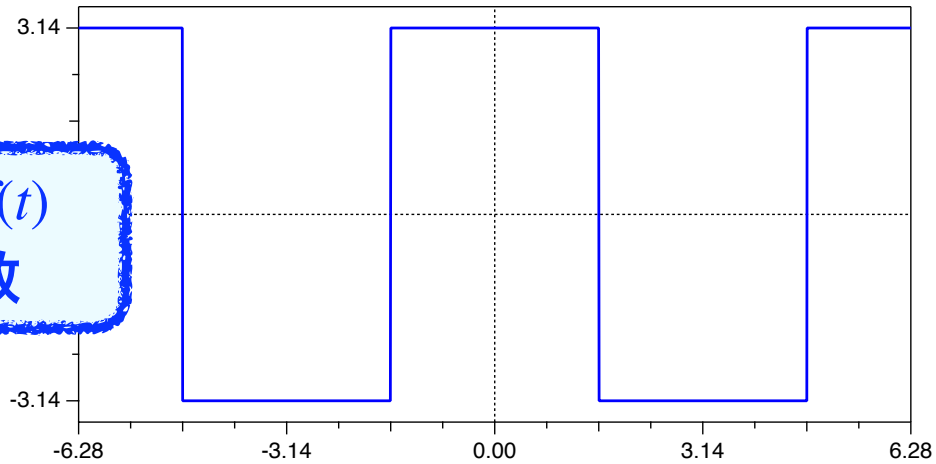
$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} -\left|\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right|\frac{8}{\pi k^2}\cos kt$$



$f(-t) = f(t)$

偶関数

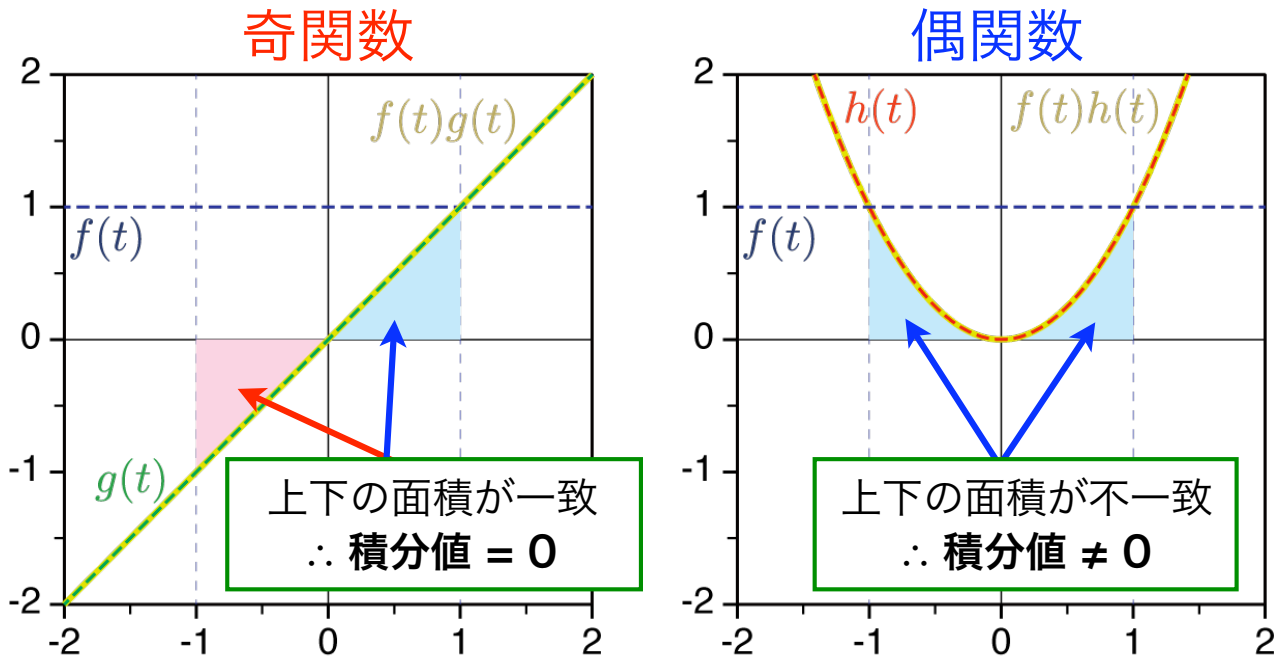
$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\frac{4}{k}\cos kt$$



偶関数・奇関数とフーリエ級数展開

関数の内積は、関数の積を
指定範囲で積分したもの $< f(t), g(t) >= \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt$

原点対称の積分範囲を考えると、



フーリエ係数： $a_k = \sqrt{2}\alpha_k = \dfrac{\omega_0}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\cos(k\omega_0 t)\,dt \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$

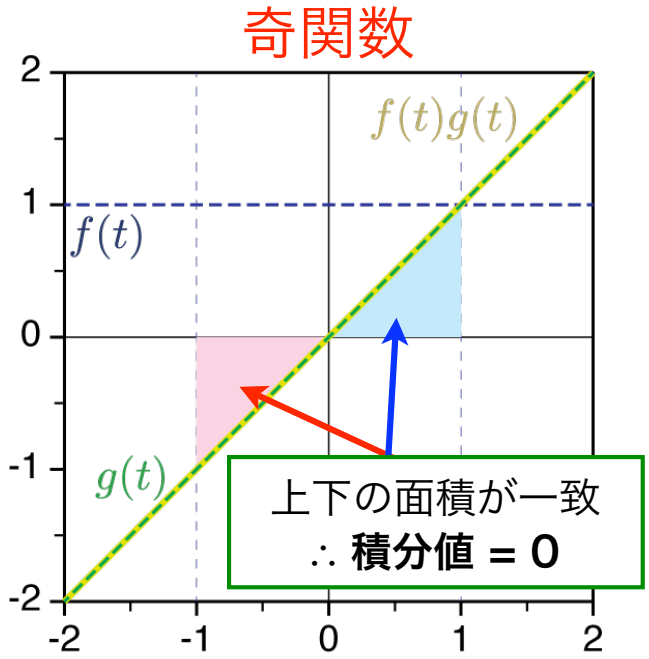
$b_k = \sqrt{2}\beta_k = \dfrac{\omega_0}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\sin(k\omega_0 t)\,dt \quad (k = 1, 2, \cdots)$

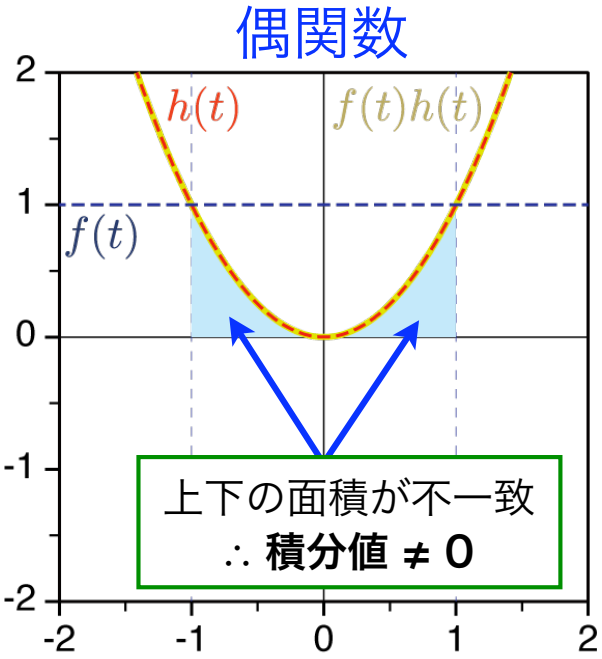
偶関数・奇関数とフーリエ級数展開

関数の内積は、関数の積を
指定範囲で積分したもの $< f(t), g(t) >= \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt$

原点対称の積分範囲を考えると、

$f(t)$	$f \bullet \cos$	$f \bullet \sin$
奇	奇	**偶**
偶	**偶**	奇





フーリエ係数：$a_k = \sqrt{2}\alpha_k = \dfrac{\omega_0}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\cos(k\omega_0 t)\,dt \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$

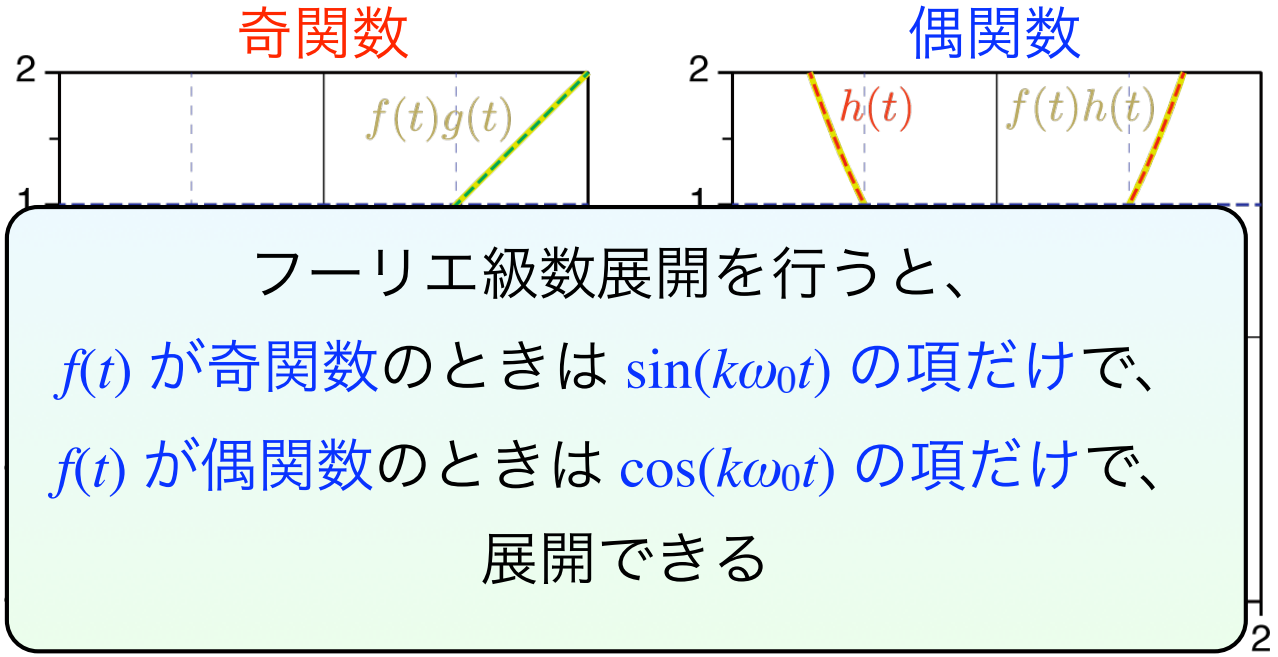
$b_k = \sqrt{2}\beta_k = \dfrac{\omega_0}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\sin(k\omega_0 t)\,dt \quad (k = 1, 2, \cdots)$

偶関数・奇関数とフーリエ級数展開

関数の内積は、関数の積を
指定範囲で積分したもの $< f(t), g(t) >= \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt$

原点対称の積分範囲を考えると、

$f(t)$	f • cos	f • sin
奇	奇	**偶**
偶	**偶**	奇



フーリエ級数展開を行うと、
$f(t)$ が奇関数のときは $\sin(k\omega_0 t)$ の項だけで、
$f(t)$ が偶関数のときは $\cos(k\omega_0 t)$ の項だけで、
展開できる

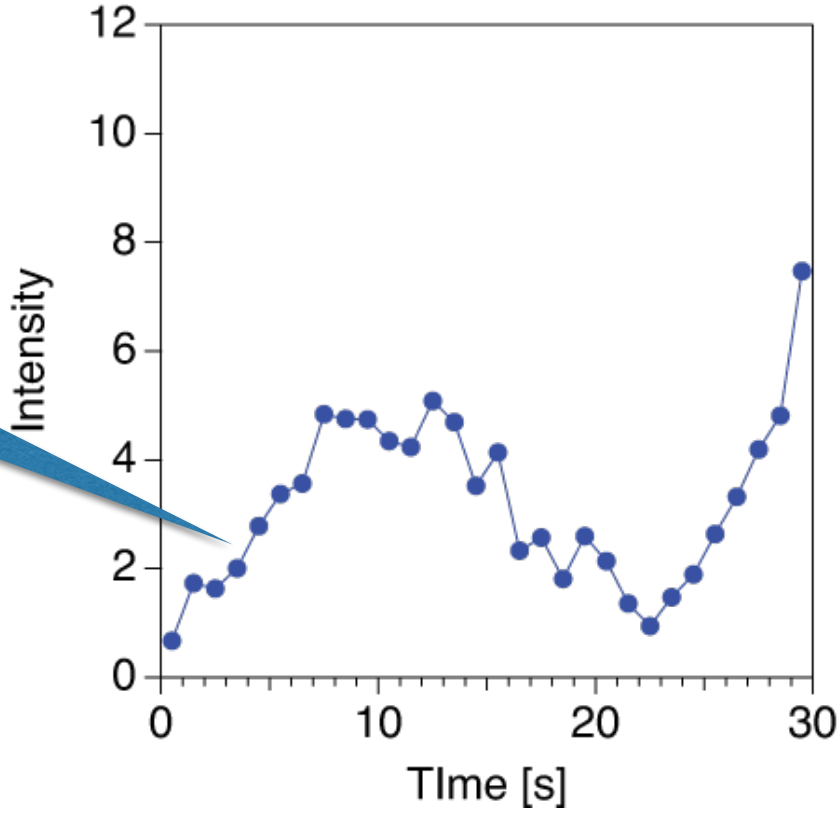
フーリエ係数：

$$a_k = \sqrt{2}\alpha_k = \frac{\omega_0}{\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\cos(k\omega_0 t)\,dt \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_k = \sqrt{2}\beta_k = \frac{\omega_0}{\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\sin(k\omega_0 t)\,dt \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

ディジタル信号に対するフーリエ級数展開

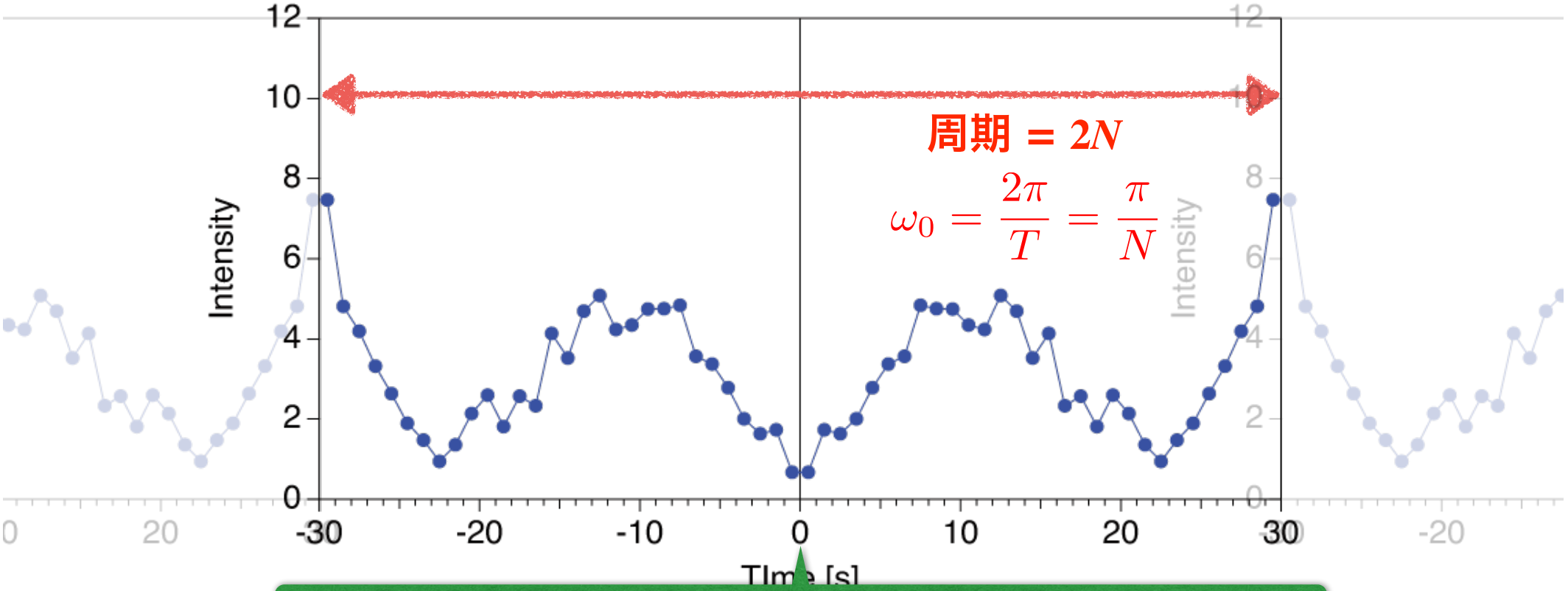
一般に測定信号は、
有限時間で非周期的



$$a_k = \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t) \cos(k\omega_0 t)\, dt$$

$$b_k = \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t) \sin(k\omega_0 t)\, dt$$

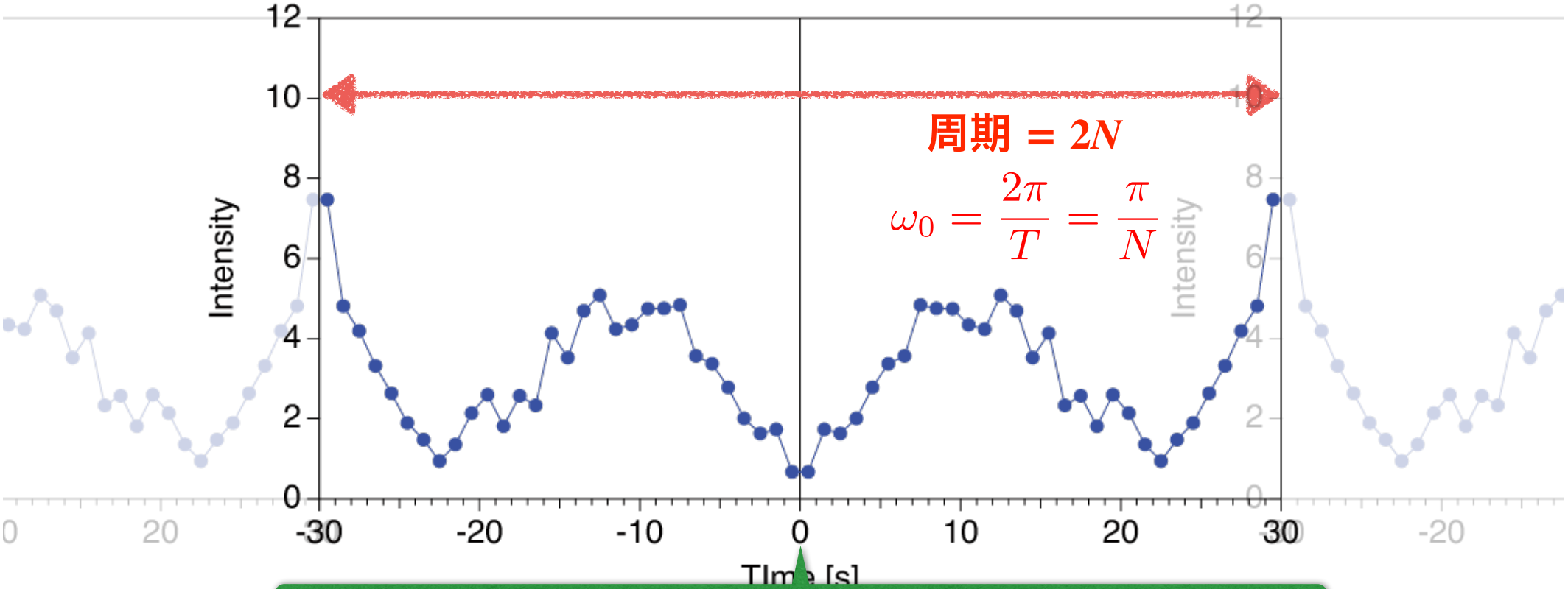
ディジタル信号に対するフーリエ級数展開



データを原点に対して線対称に折り返すことで、
周期偶関数にすることができる → a_k だけで展開可能

$$a_k = \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t) \cos(k\omega_0 t)\, dt$$

ディジタル信号に対するフーリエ級数展開

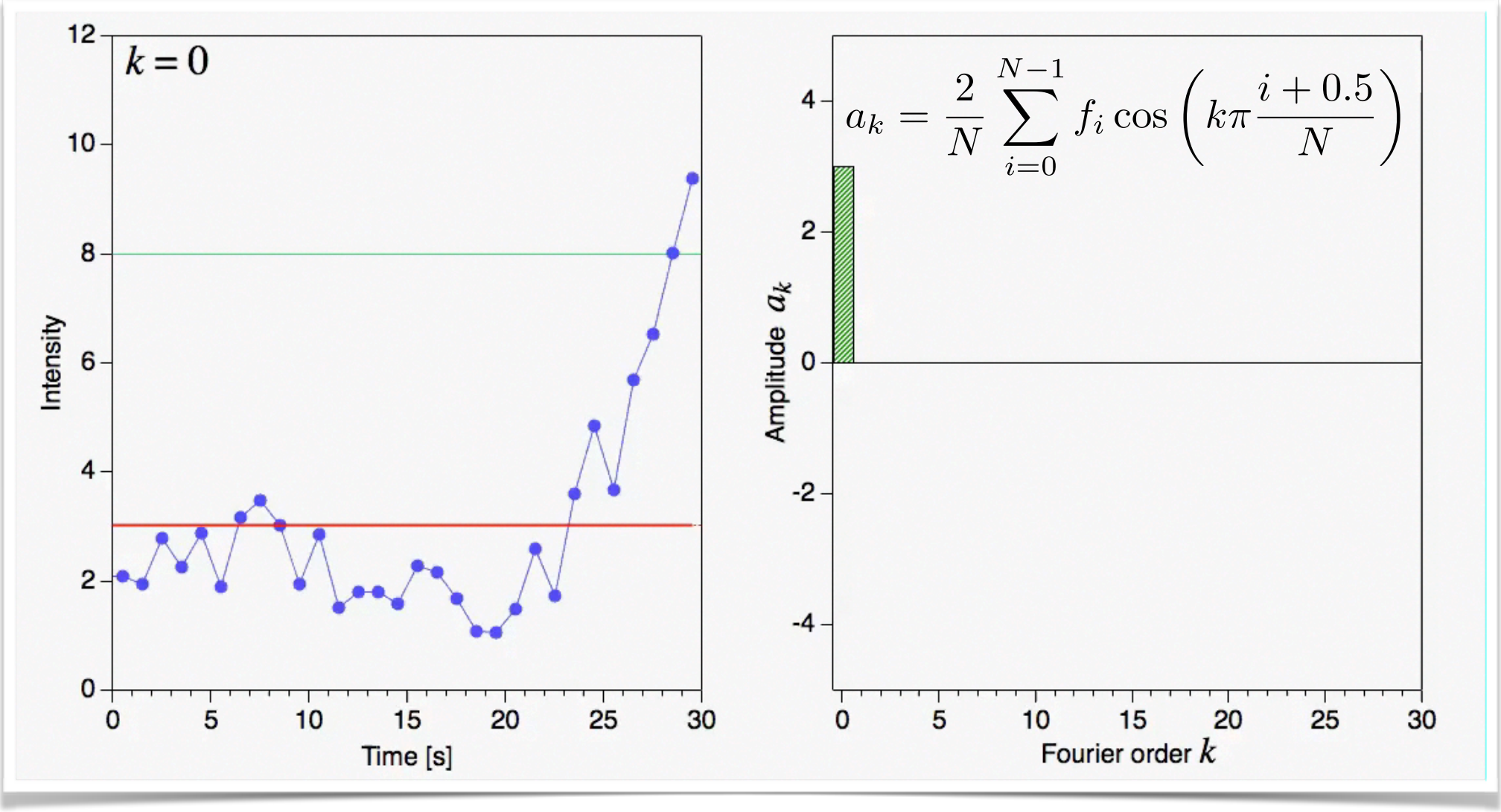


データを原点に対して線対称に折り返すことで、
周期偶関数にすることができる → a_k だけで展開可能

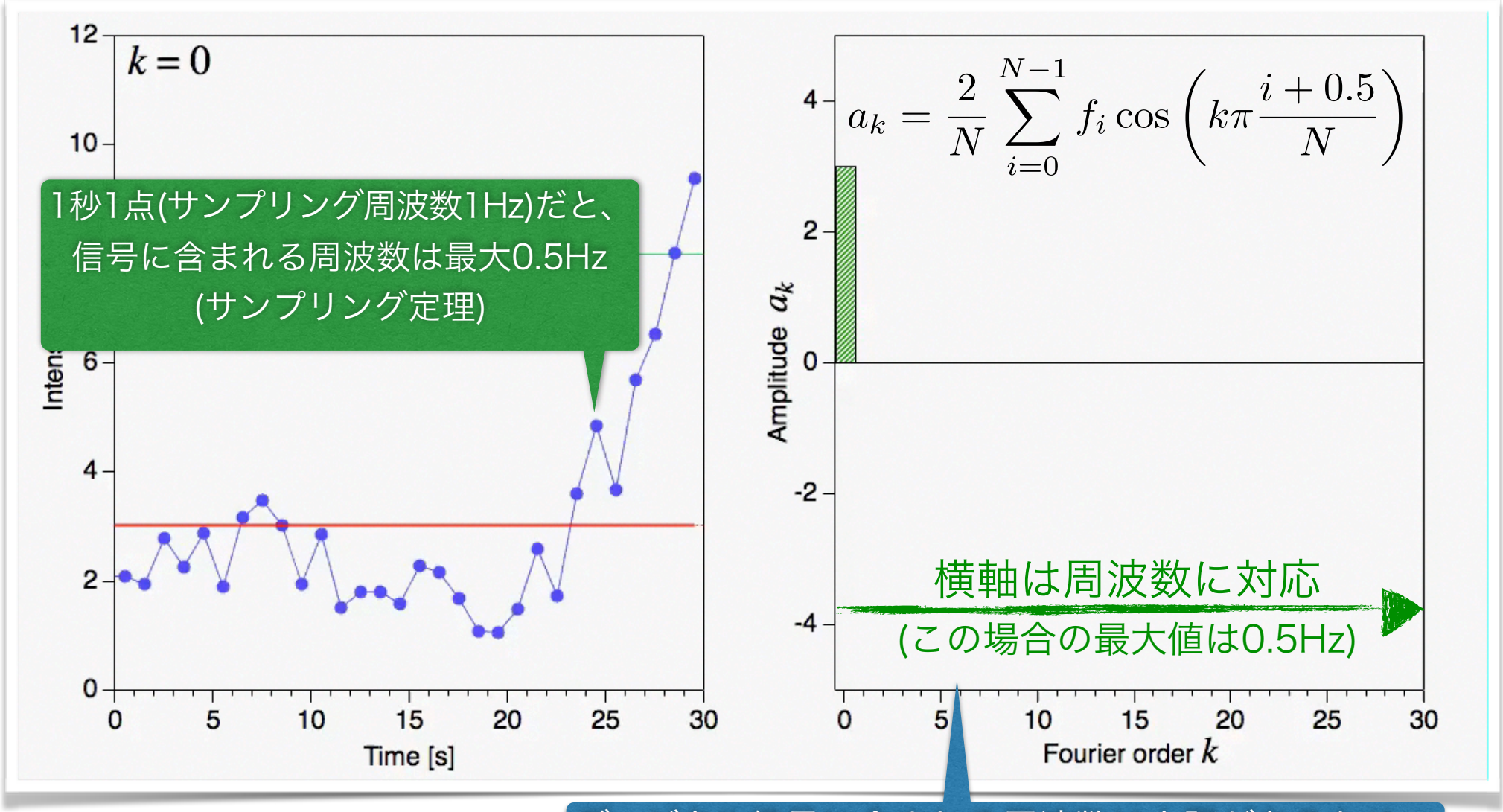
$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i \cos\left(k\pi \frac{i+0.5}{N}\right)$$

離散的(多次元ベクトル)なので、
積分ではなく加算

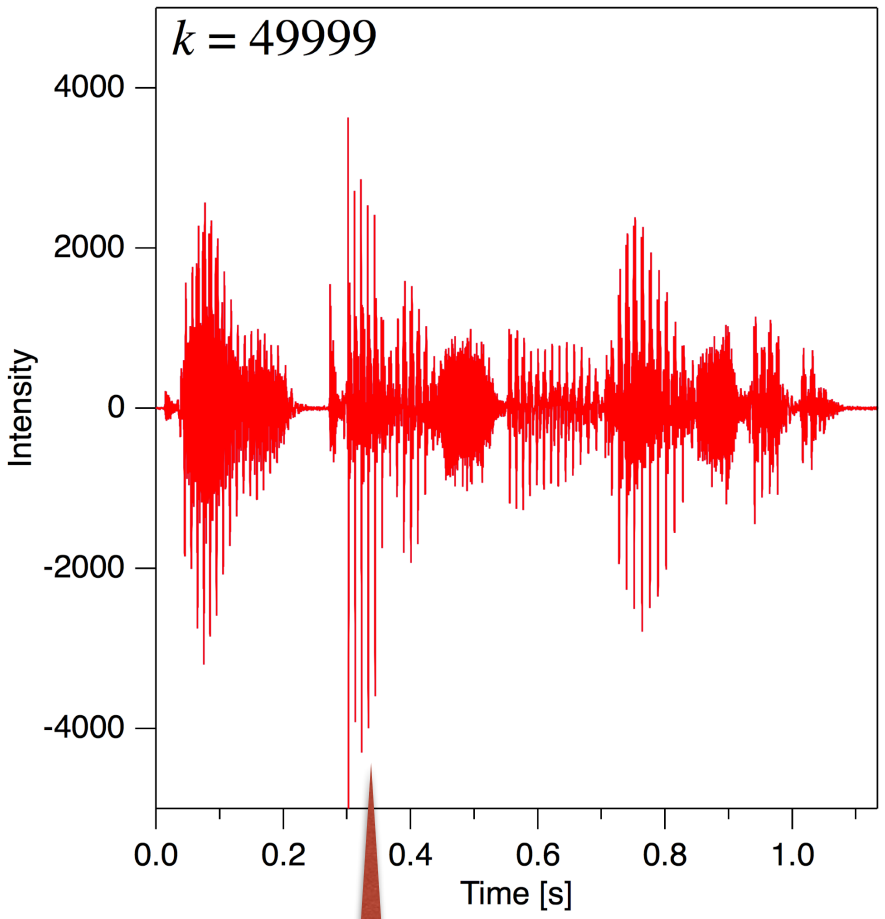
ディジタル信号に対するフーリエ級数展開

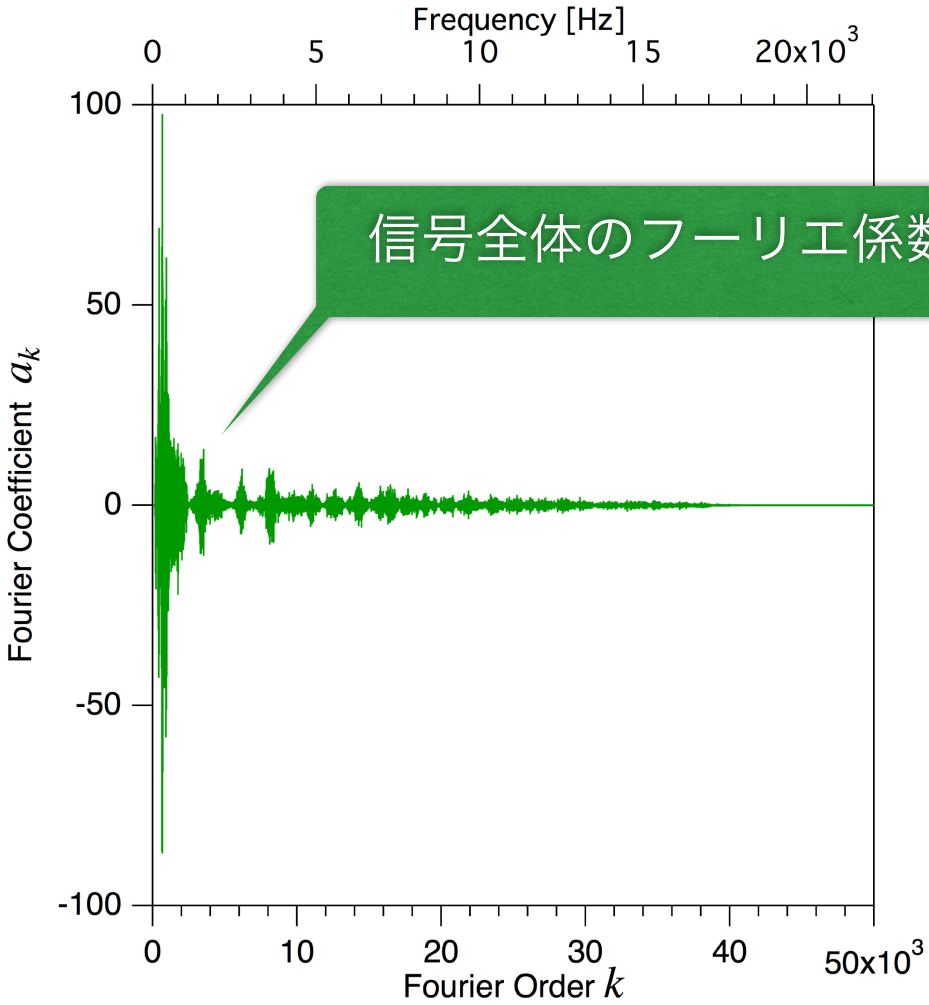


ディジタル信号に対するフーリエ級数展開



ディジタル信号のフーリエ級数展開

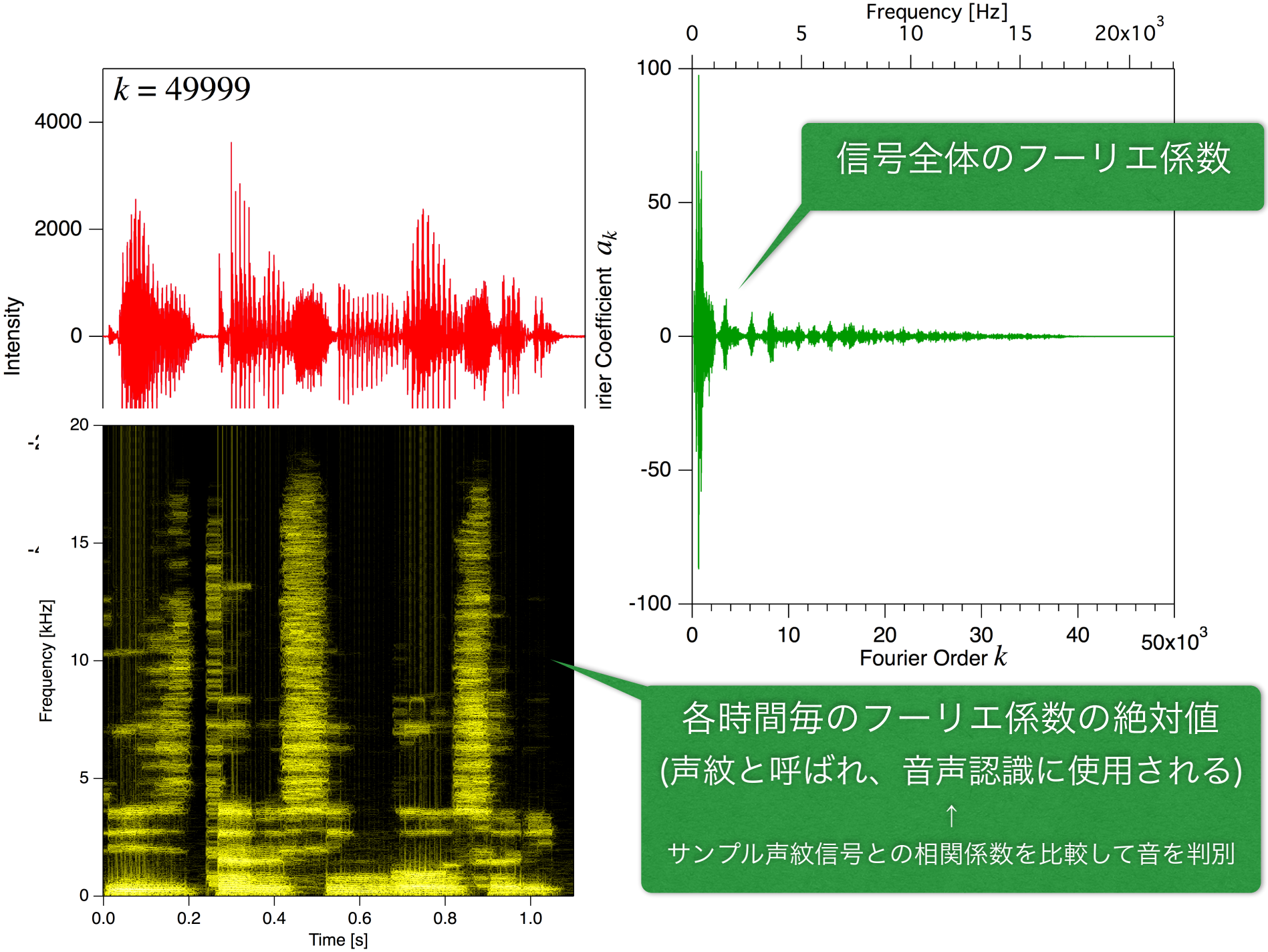




信号全体のフーリエ係数

44.1kHzでサンプリングした音声データ
「でじたるしんごうしょり」

ディジタル信号のフーリエ級数展開

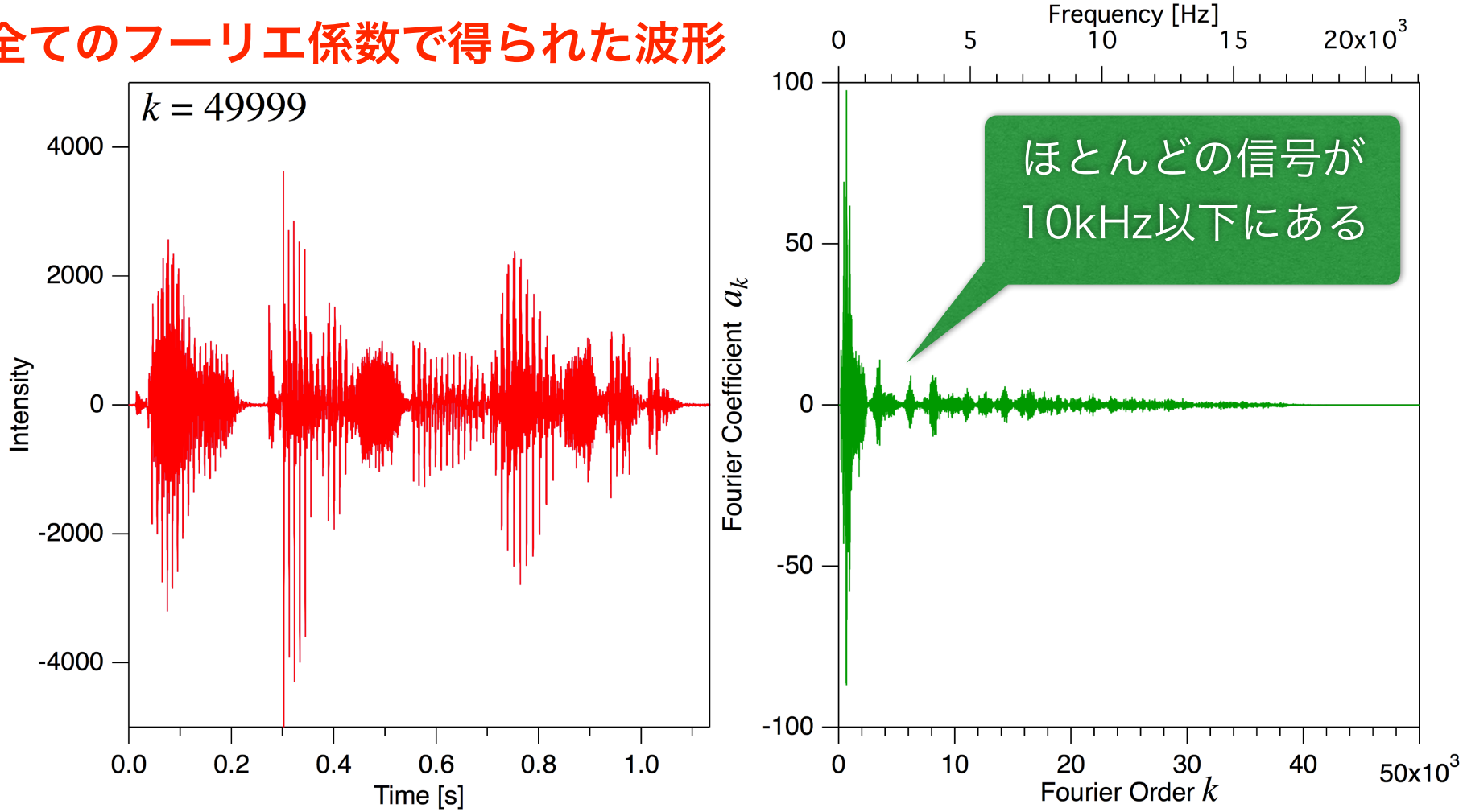


信号全体のフーリエ係数

各時間毎のフーリエ係数の絶対値
(声紋と呼ばれ、音声認識に使用される)
↑
サンプル声紋信号との相関係数を比較して音を判別

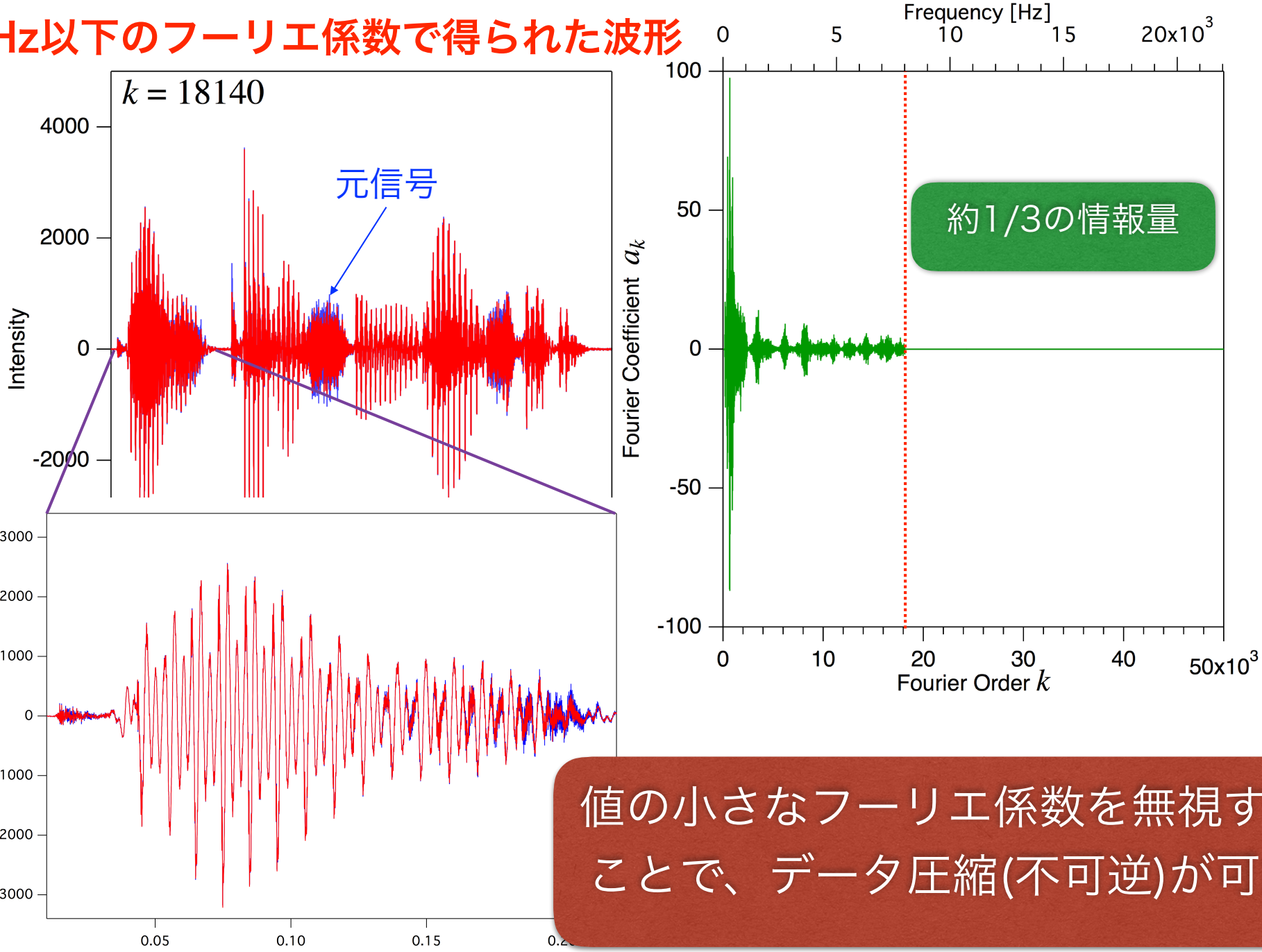
ディジタル信号のフーリエ級数展開

全てのフーリエ係数で得られた波形



フーリエ級数展開による信号圧縮

8kHz以下のフーリエ係数で得られた波形



値の小さなフーリエ係数を無視することで、データ圧縮(不可逆)が可能

複素フーリエ級数展開

複素関数を用いて、フーリエ級数展開

本題に入る前に、まずは複素数の復習

複素数：実数と虚数の組み合わせでできた数

$$1, -2.5, \frac{2}{3}, \sqrt{3}, \cdots + j, 2.5j, \frac{2}{3}j, \sqrt{3}j, \cdots$$

虚数単位：$j = \sqrt{-1}$ ， $j^2 = -1$

数学では i を用いるのが一般的であるが、工学分野では j を用いることが多い

複素関数：複素数を値に持つ関数

$$f(t) = \sin(\omega t) + j\cos(\omega t)$$

実部：$\Re[f(t)] = \sin(\omega t)$ ↑Re とも書く

虚部：$\Im[f(t)] = \cos(\omega t)$ ↑Im とも書く

複素数の演算と複素平面

二つの複素数 $z_1 = \alpha_1 + j\beta_1$ ， $z_2 = \alpha_2 + j\beta_2$ があるとき、

加算： $z_1 + z_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) + j(\beta_1 + \beta_2)$

実部同士の和　虚部同士の和

減算： $z_1 - z_2 = (\alpha_1 - \alpha_2) + j(\beta_1 - \beta_2)$

乗算： $z_1 \cdot z_2 = \alpha_1\alpha_2 + j\alpha_1\beta_2 + j\beta_1\alpha_2 + j^2\beta_1\beta_2$

$= (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + j(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)$

−1

基本的には実数における多項式の乗算と同じ

除算： $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(\alpha_1 + j\beta_1)(\alpha_2 - j\beta_2)}{(\alpha_2 + j\beta_2)(\alpha_2 - j\beta_2)}$

$= \dfrac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 - j(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}$

複素数の演算と複素平面

二つの複素数 $z_1 = \alpha_1 + j\beta_1$ ， $z_2 = \alpha_2 + j\beta_2$ があるとき、

加算： $z_1 + z_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) + j(\beta_1 + \beta_2)$

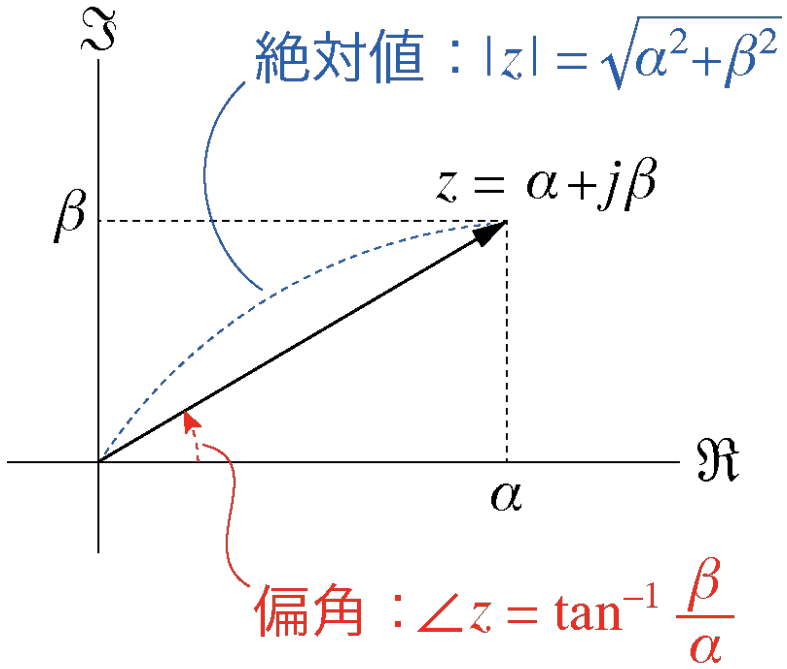
実部同士の和　虚部同士の和

複素数の和は2次元ベクトルの和

$\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g} = (f_x + g_x)\boldsymbol{v}_x + (f_y + g_y)\boldsymbol{v}_y$

と形式的に同じ

複素数を「実数軸」と「虚数軸」でできた空間(**複素平面**)内の二次元のベクトルとして取り扱う

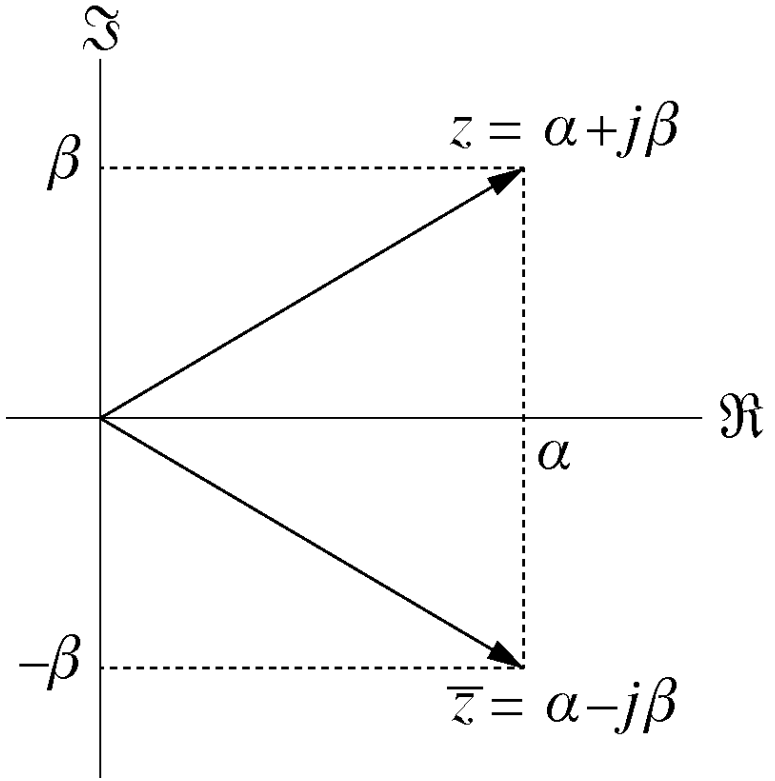


複素平面内の複素数

絶対値や偏角は実数値

複素共役

右図のように、実軸に対して鏡面対称にある
二つの複素数を **複素共役の関係**にある という。



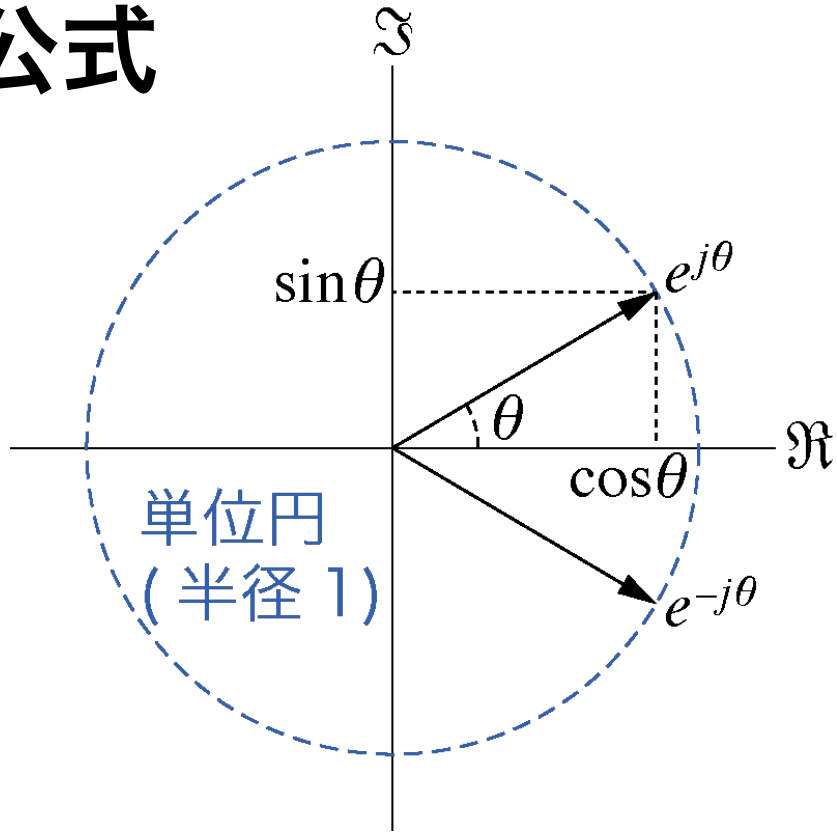
複素共役

- 共役複素数に関する性質
  - $z = \alpha + j\beta\,,\ \ \overline{z} = \alpha - j\beta$
  - $z + \overline{z} = 2\alpha = 2\,\Re[z]$
  - $z - \overline{z} = 2j\beta = 2j\Im[z]$
  - $z \cdot \overline{z} = (\alpha + j\beta)(\alpha - j\beta)$
    $= \alpha^2 + \beta^2 = |z|^2$
  - $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + j(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)}$
    $= (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) - j(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)$
    $= (\alpha_1 - j\beta_1) \cdot (\alpha_2 - j\beta_2) = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

オイラーの公式

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

複素平面内の単位円上で偏角θの複素数



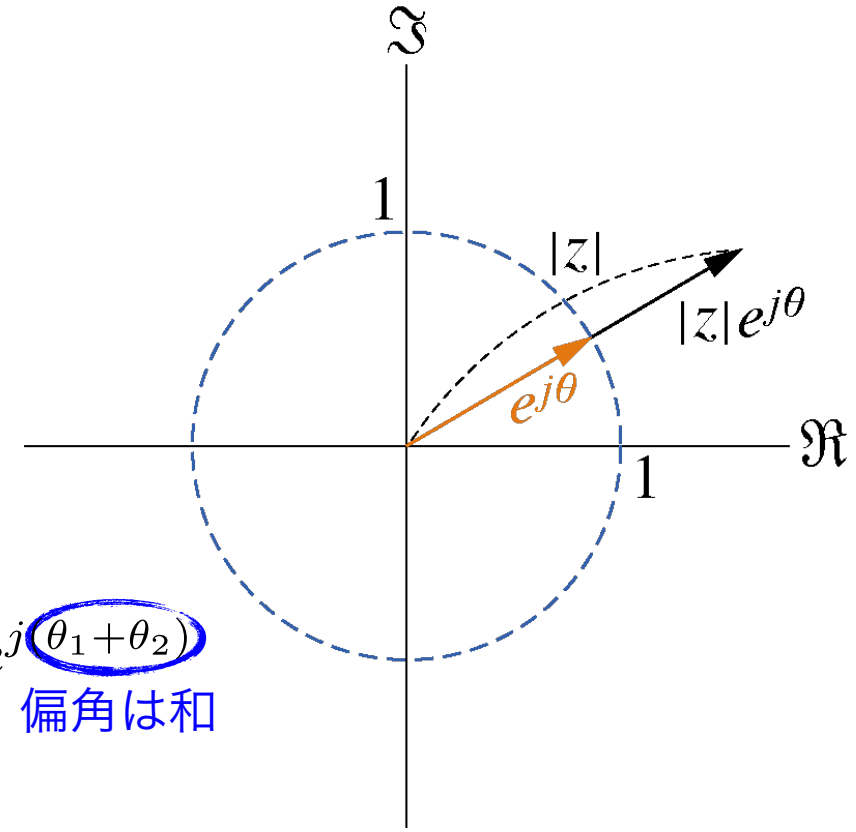
- $e^{j\theta}$ に関する重要な性質
  - $|e^{j\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$
  - $\angle e^{j\theta} = \tan^{-1}\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \theta$
  - $e^0 = 1\,,\ e^{\pm jk\pi} = 1(k = 2n)\ :\ -1(k = 2n+1)$
  - $\overline{e^{j\theta}} = \cos\theta - j\sin\theta = \cos(-\theta) + j\sin(-\theta) = e^{-j\theta}$
  - $\cos\theta = \dfrac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}\,,\ \ \sin\theta = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

複素数の指数関数表現と演算

絶対値 $|z|$ 、偏角 θ の複素数 z は、

$$z = |z|\, e^{j\theta}$$

と書ける(ベクトルの極座標表現に相当)。



- 複素数の乗算と除算

絶対値は積

乗算：$z_1 \cdot z_2 = |z_1|\, e^{j\theta_1} \cdot |z_2|\, e^{j\theta_2} = |z_1|\,|z_2|\, e^{j(\theta_1+\theta_2)}$

偏角は和

除算：$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|\, e^{j\theta_1}}{|z_2|\, e^{j\theta_2}} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} e^{j(\theta_1-\theta_2)}$

偏角は差

絶対値は商

実部 α と虚部 β を用いた計算より簡単！

$$z_1 \cdot z_2 = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + j(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 - j(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}$$

複素関数の内積

$f(t) = \alpha(t) + j\beta(t)$ として、

$$||f(t)||^2 = ||\alpha(t)||^2 + ||\beta(t)||^2 = \frac{1}{b-a}\left\{\int_a^b \alpha^2(t)\,dt + \int_a^b \beta^2(t)\,dt\right\}$$

$$< f(t), f(t) >= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)f(t)\,dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b \{\alpha(t) + j\beta(t)\}^2\,dt$$

$$= \frac{1}{b-a}\left\{\int_a^b \alpha^2(t)\,dt + 2j\int_a^b \alpha(t)\beta(t)\,dt - \int_a^b \beta^2(t)\,dt\right\}$$

$$\neq ||f(t)||^2$$

自分自身の内積がノルムの自乗に一致しない！

複素関数の内積

$f(t) = \alpha(t) + j\beta(t)$ として、

$$||f(t)||^2 = ||\alpha(t)||^2 + ||\beta(t)||^2 = \frac{1}{b-a}\left\{\int_a^b \alpha^2(t)\,dt + \int_a^b \beta^2(t)\,dt\right\}$$

$$< f(t), f(t) >= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)f(t)\,dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b \{\alpha(t) + j\beta(t)\}^2\,dt$$

$$= \frac{1}{b-a}\left\{\int_a^b \alpha^2(t)\,dt + 2j\int_a^b \alpha(t)\beta(t)\,dt - \int_a^b \beta^2(t)\,dt\right\}$$

$$\neq ||f(t)||^2$$

自分自身の内積がノルムの自乗に一致しない！

複素関数の内積

$f(t) = \alpha(t) + j\beta(t)$ として、

$$||f(t)||^2 = ||\alpha(t)||^2 + ||\beta(t)||^2 = \frac{1}{b-a}\left\{\int_a^b \alpha^2(t)\,dt + \int_a^b \beta^2(t)\,dt\right\}$$

$$< f(t), f(t) >= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\overline{f(t)}\,dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b \{\alpha(t)+j\beta(t)\}\{\alpha(t)-j\beta(t)\}\,dt$$

一方を複素共役関数にする

複素関数の内積

$f(t) = \alpha(t) + j\beta(t)$ として、

$$||f(t)||^2 = ||\alpha(t)||^2 + ||\beta(t)||^2 = \frac{1}{b-a}\left\{\int_a^b \alpha^2(t)\,dt + \int_a^b \beta^2(t)\,dt\right\}$$

$$< f(t), f(t) >= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\overline{f(t)}\,dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b \{\alpha(t)+j\beta(t)\}\{\alpha(t)-j\beta(t)\}\,dt$$

$$= \frac{1}{b-a}\left\{\int_a^b \alpha^2(t)\,dt + \int_a^b \beta^2(t)\,dt\right\} = ||f(t)||^2$$

自分自身の内積がノルムの自乗に一致

すなわち、複素関数の内積の定義は

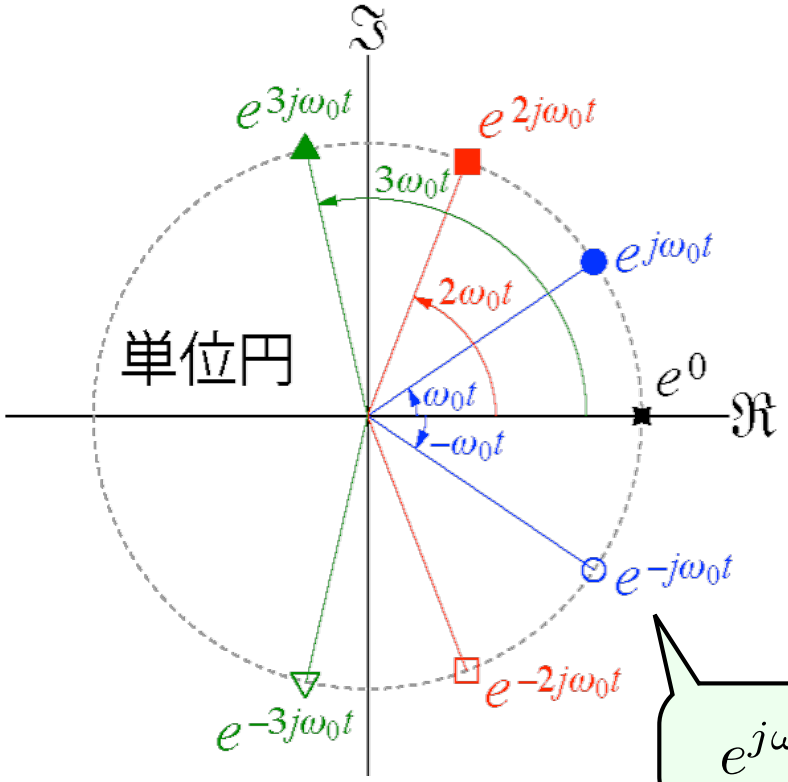
$$< f(t), g(t) >= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$$

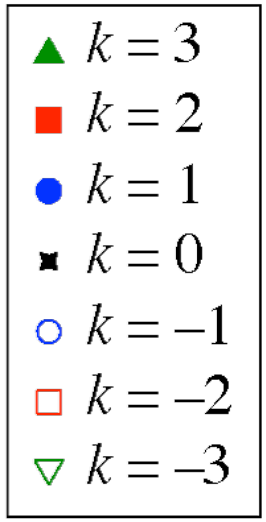
一方を複素共役関数にする

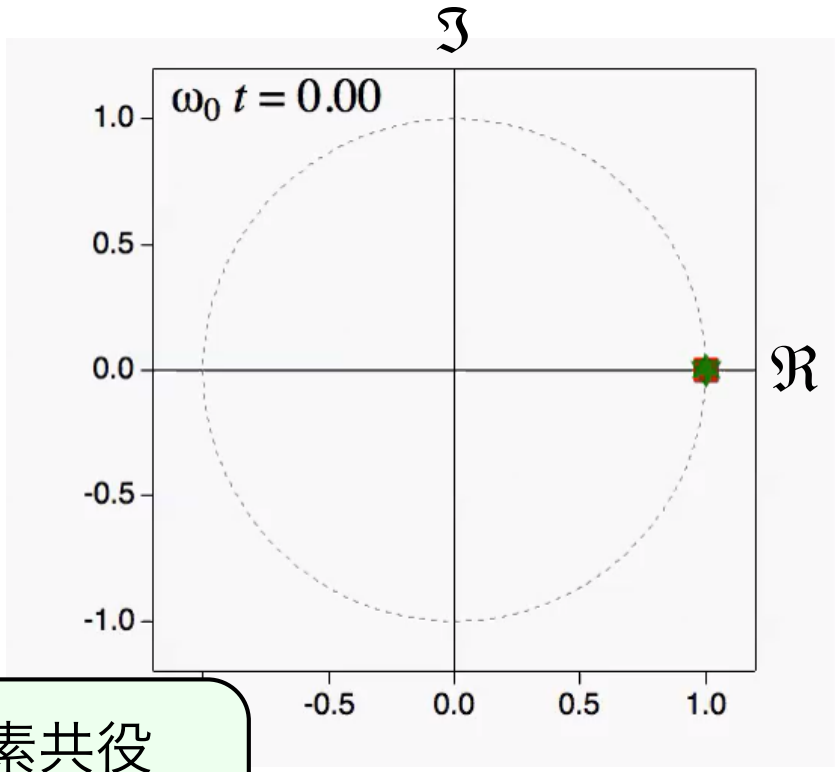
複素フーリエ級数展開

角周波数 ω_0 の関数 $f(t)$ を複素関数系 $\{\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}\ (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)\}$

で展開することを考える。ここで、展開に用いる関数 $\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ とは、







$e^{j\omega_0 t}$ と $e^{-j\omega_0 t}$ は複素共役

$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ は複素平面中の単位円上で $k\omega_0$ (rad/s) の角速度で反時計方向に回転する点であり、

$k < 0$ のときは、逆回転(時計回り)する点である。

複素フーリエ級数展開

まず、複素関数系 $\left\{\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)\right\}$ が、

区間 $[-\pi/\omega_0, \pi/\omega_0]$ で正規直交関数系をなすことを証明する

$$< e^{jm\omega_0 t}, e^{jn\omega_0 t} >= \delta_{mn}$$

$$< e^{jm\omega_0 t}, e^{jn\omega_0 t} > = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} e^{jm\omega_0 t}\, \overline{e^{jn\omega_0 t}}\, dt$$

$$= \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} e^{j(m-n)\omega_0 t}\, dt$$

$m = n$ ： $< e^{jm\omega_0 t}, e^{jm\omega_0 t} > = \dfrac{\omega_0}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} e^0\, dt = \frac{\omega_0}{2\pi} [t]_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} = 1$

$m \neq n$ ： $< e^{jm\omega_0 t}, e^{jn\omega_0 t} > = \dfrac{\omega_0}{2\pi} \left[\dfrac{e^{j(m-n)\omega_0 t}}{j(m-n)\omega_0}\right]_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0}$

$$= \frac{1}{(m-n)\pi} \frac{e^{j(m-n)\pi} - e^{-j(m-n)\pi}}{2j}$$

$$= \frac{1}{(m-n)\pi} \sin\{(m-n)\pi\} = 0$$

複素フーリエ級数展開

角周波数 ω_0 の関数 $f(t)$ は正規直交複素関数系 $\{e^{jk\omega_0 t}\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)\}$ で展開することができ、

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$C_k =< f(t), e^{jk\omega_0 t} >= \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

フーリエ係数も複素数

複素共役をとるので負号が付く！

実フーリエ変換の式より簡単！(直流, cos, sin に分けなくてよい)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)\}$$

$$a_k = \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\ \cos(k\omega_0 t)\, dt$$

$$b_k = \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\ \sin(k\omega_0 t)\, dt$$

複素フーリエ係数

直流成分：$k=0$

$$C_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\,dt \quad \rightarrow \text{直流成分} = f(t)\text{の平均値・・・常に実数}$$

第 k 高調波

$$C_k = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\left\{\cos(k\omega_0 t) - j\sin(k\omega_0 t)\right\}\,dt$$

$$= \frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\cos(k\omega_0 t)\,dt - j\frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\sin(k\omega_0 t)\,dt$$

$$C_{-k} = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\,\cos(k\omega_0 t)\,dt + j\frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\,\sin(k\omega_0 t)\,dt$$

C_k と C_{-k} は**複素共役**

$$|C_k| = |C_{-k}|,\ \angle C_k = -\angle C_{-k}$$

複素フーリエ級数展開

C_k と C_{-k} は複素共役、$e^{jk\omega_0 t}$ と $e^{-jk\omega_0 t}$ は複素共役

→ $C_k\, e^{jk\omega_0 t}$ と $C_{-k}\, e^{-jk\omega_0 t}$ も複素共役

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$ の k の項と $-k$ の項をペアで考える

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ C_k\, e^{jk\omega_0 t} + C_{-k}\, e^{-jk\omega_0 t} \right\}$$

ここで、C_k を絶対値 $|C_k|$ と偏角 $\angle C_k = \varphi_k$ で表現すると、$C_k = |C_k| e^{j\varphi_k}$

$$\therefore \begin{cases} C_k\, e^{jk\omega_0 t} = |C_k|\, e^{j\varphi_k}\, e^{jk\omega_0 t} = |C_k| e^{j(k\omega_0 t + \varphi_k)} \\ C_{-k}\, e^{-jk\omega_0 t} = |C_k| e^{-j(k\omega_0 t + \varphi_k)} \end{cases}$$

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |C_k| \left\{ e^{j(k\omega_0 t + \varphi_k)} + e^{-j(k\omega_0 t + \varphi_k)} \right\}$$

$$= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|C_k| \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

第k高調波は、振幅 $2|C_k|$、初期位相 φ_k、角周波数 $k\omega_0$ の cos 波

複素フーリエ級数展開

C_k と C_{-k} は複素共役、$e^{jk\omega_0 t}$ と $e^{-jk\omega_0 t}$ は複素共役

→ $C_k\, e^{jk\omega_0 t}$ と $C_{-k}\, e^{-jk\omega_0 t}$ も複素共役

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$ の k の項と $-k$ の項をペアで考える

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ C_k\, e^{jk\omega_0 t} + C_{-k}\, e^{-jk\omega_0 t} \right\}$$

ここで、C_k を絶対値 $|C_k|$ と偏角 $\angle C_k = \varphi_k$ で表現すると、$C_k = |C_k| e^{j\varphi_k}$

$$\therefore \begin{cases} C_k\, e^{jk\omega_0 t} = |C_k|\, e^{j\varphi_k}\, e^{jk\omega_0 t} = |C_k| e^{j(k\omega_0 t + \varphi_k)} \\ C_{-k}\, e^{-jk\omega_0 t} = |C_k| e^{-j(k\omega_0 t + \varphi_k)} \end{cases}$$

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |C_k| \left\{ e^{j(k\omega_0 t + \varphi_k)} + e^{-j(k\omega_0 t + \varphi_k)} \right\}$$

$$= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|C_k| \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

結局は実関数

第k高調波は、振幅 $2|C_k|$、初期位相 φ_k、角周波数 $k\omega_0$ の cos 波

複素フーリエ級数展開

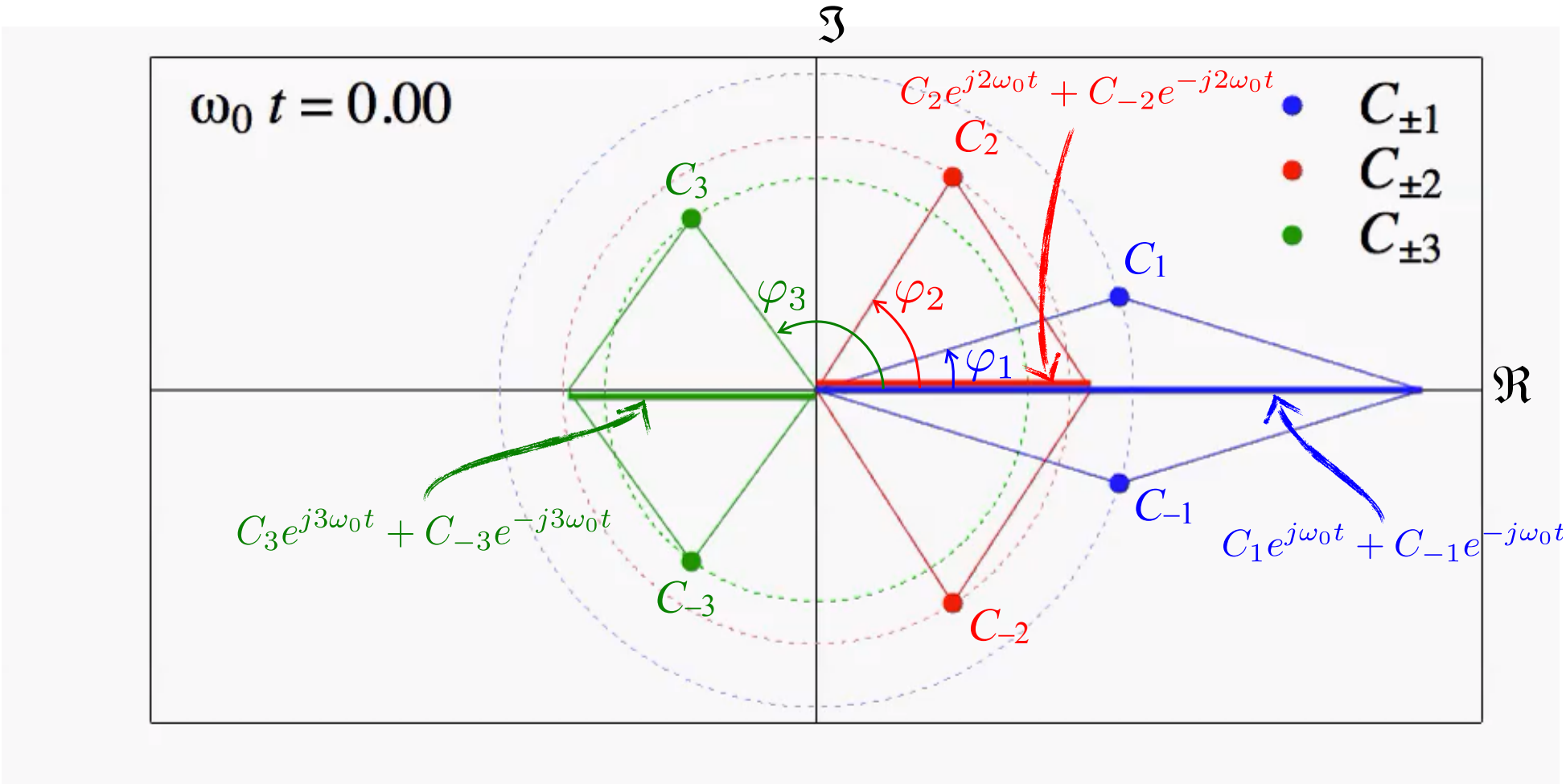
$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{C_k\, e^{jk\omega_0 t} + C_{-k}\, e^{-jk\omega_0 t}\}$$

$$= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|C_k| \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

角周波数

振幅

初期位相



複素フーリエ級数展開

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{C_k\, e^{jk\omega_0 t} + C_{-k}\, e^{-jk\omega_0 t}\}$$

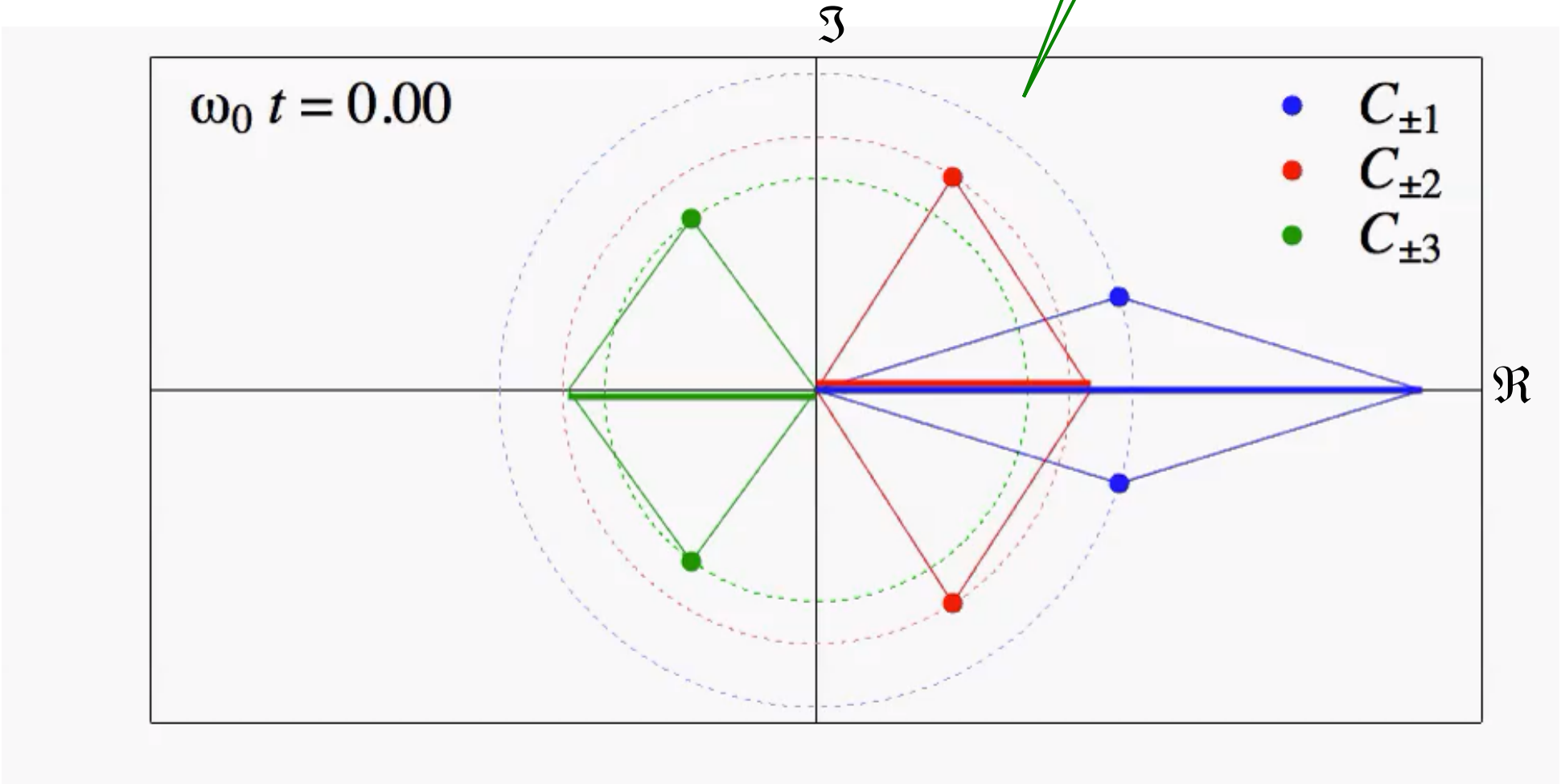
$$= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|C_k| \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

角周波数

振幅

初期位相

$C_k e^{jk\omega_0 t} + C_{-k} e^{-jk\omega_0 t}$ は、
実軸上を周期変動している



複素フーリエ級数展開

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{C_k\, e^{jk\omega_0 t} + C_{-k}\, e^{-jk\omega_0 t}\}$$

$$= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|C_k| \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

ところで、一般に、$a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\varphi)$

ここで、$\varphi = \cos^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin^{-1}\dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

これを用いて、実フーリエ級数展開を変形すると、

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)\}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

ここで、$\varphi_k = \cos^{-1}\dfrac{a_k}{\sqrt{a_k^2+b_k^2}} = \sin^{-1}\dfrac{-b_k}{\sqrt{a_k^2+b_k^2}}$

複素フーリエ級数展開

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{C_k\, e^{jk\omega_0 t} + C_{-k}\, e^{-jk\omega_0 t}\}$$

$$= C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|C_k| \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

ところで、一般に、

$$C_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$|C_k| = \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{2}$$

$$\varphi_k = \cos^{-1} \frac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} = \sin^{-1} \frac{-b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}$$

これを用いて、実フ

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum$$

$k=1$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$$

ここで、$\varphi_k = \cos^{-1} \dfrac{a_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} = \sin^{-1} \dfrac{-b_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}$

フーリエ係数の k 依存性＝スペクトル

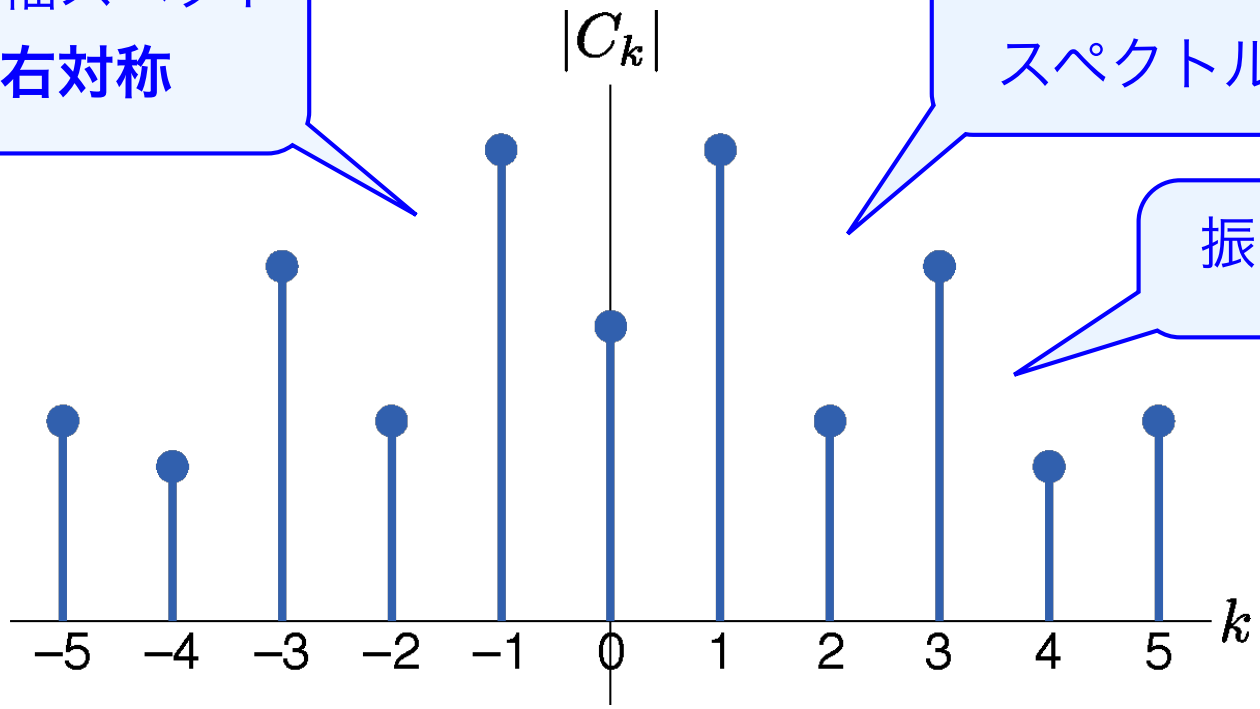
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k| e^{j(k\omega_0 t + \varphi_k)}$$

$C_{\pm k}$ は互いに複素共役なので、振幅スペクトルは**左右対称**

振幅スペクトル

k が離散的なので、スペクトルも**離散的**

振幅は**正の実数**



横軸 k は、**周波数** $k\dfrac{\omega_0}{2\pi}$ [Hz] に相当する

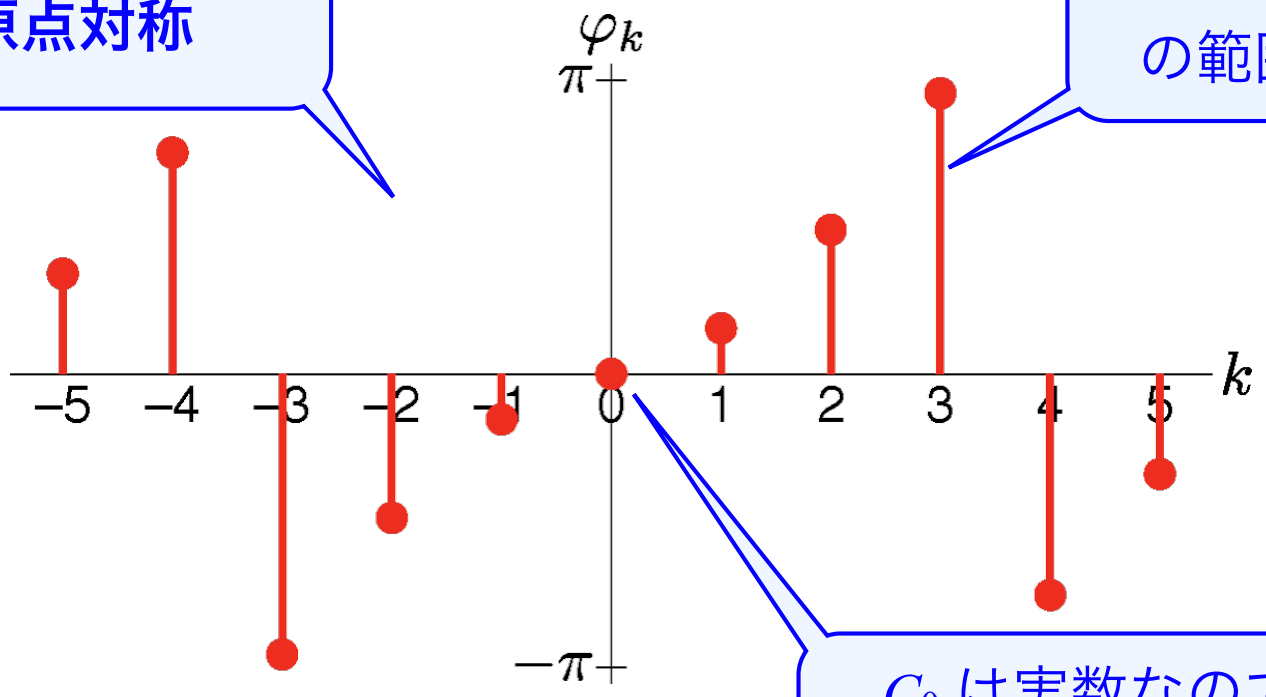
フーリエ係数の k 依存性＝スペクトル

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k| e^{j(k\omega_0 t + \varphi_k)}$$

$C_{\pm k}$ は互いに複素共役なので、位相スペクトルは**原点対称**

位相スペクトル

位相は $[-\pi, \pi]$ の範囲の実数



C_0 は実数なので、φ_0 は 0 ($C_0 \geqq 0$) または $\pm\pi$ ($C_0 < 0$)

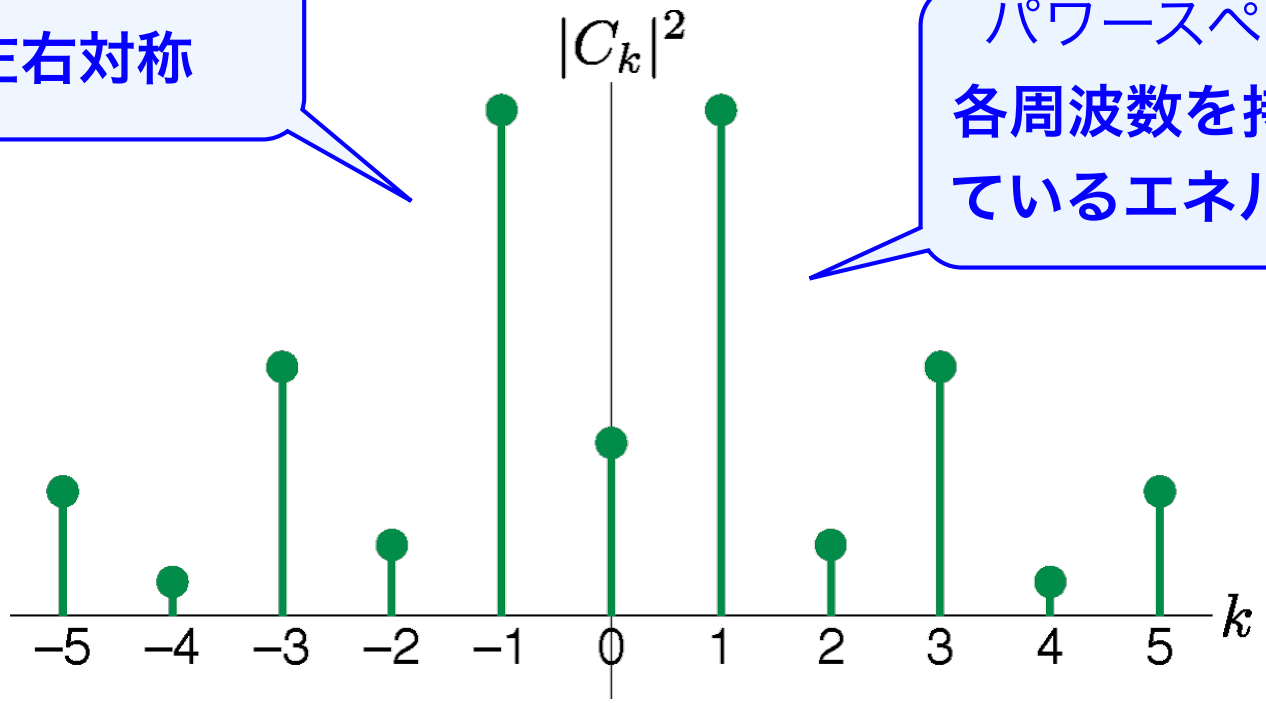
フーリエ係数の k 依存性＝スペクトル

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k| e^{j(k\omega_0 t + \varphi_k)}$$

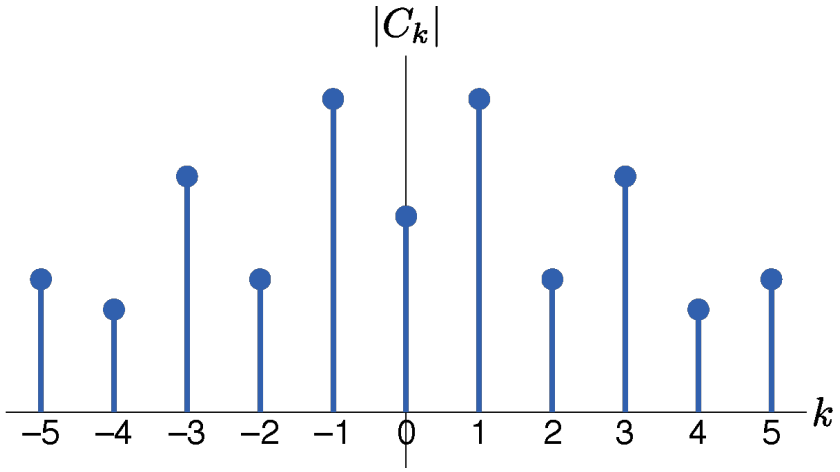
$C_{\pm k}$ は互いに複素共役なので、パワースペクトルは**左右対称**

パワースペクトル

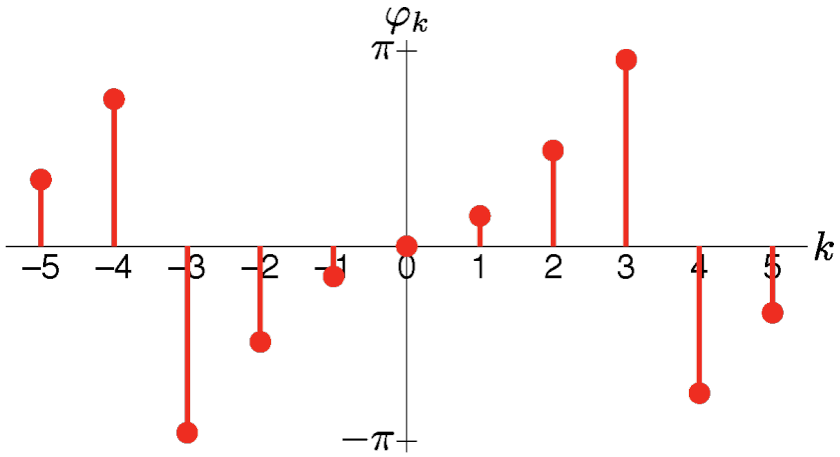
パワースペクトルは、**各周波数を持つ波が担っているエネルギー**に対応



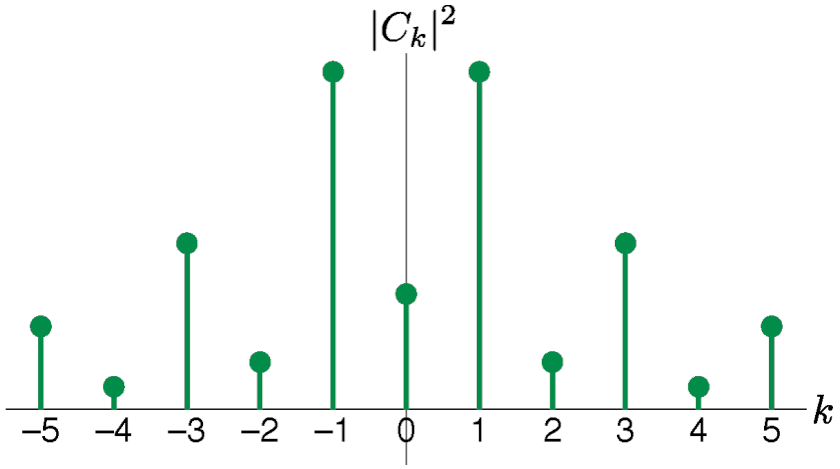
フーリエ係数の k 依存性＝スペクトル



振幅スペクトル



位相スペクトル



パワースペクトル

信号をフーリエ解析する際は、**振幅スペクトル**や**パワースペクトル**に着目することが多い。
また、対称性があるので、$k \geqq 0$ の領域だけ表示することも多い。

複素フーリエ級数展開の例(ノコギリ波)

ノコギリ波：$f(t) = t \quad [-\pi, \pi] \ldots \omega_0 = 1$

$k \neq 0$ のとき

$$C_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\, e^{-jkt}\, dt = \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{t\, e^{-jkt}}{-jk}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-jkt}}{-jk}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\left(-\frac{t}{jk} - \frac{1}{(-jk)^2}\right)e^{-jkt}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left[\left(-\frac{t}{jk} + \frac{1}{k^2}\right)e^{-jkt}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\left(-\frac{\pi}{jk} + \frac{1}{k^2}\right)e^{-jk\pi} - \left(\frac{\pi}{jk} + \frac{1}{k^2}\right)e^{jk\pi}\right\}$$

部分積分の公式

$$\int \frac{d\,u(t)}{dt} v(t)\, dt = u(t)v(t) - \int u(t)\frac{d\,v(t)}{dt}\, dt$$

複素フーリエ級数展開の例(ノコギリ波)

ノコギリ波：$f(t) = t \quad [-\pi, \pi] \ldots \omega_0 = 1$

$k \neq 0$ のとき

$$C_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\, e^{-jkt}\, dt = \frac{1}{2\pi}\left(\left[\frac{t\, e^{-jkt}}{-jk}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-jkt}}{-jk}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\left(-\frac{t}{jk} - \frac{1}{(-jk)^2}\right)e^{-jkt}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left[\left(-\frac{t}{jk} + \frac{1}{k^2}\right)e^{-jkt}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\left(-\frac{\pi}{jk} + \frac{1}{k^2}\right)e^{-jk\pi} - \left(\frac{\pi}{jk} + \frac{1}{k^2}\right)e^{jk\pi}\right\}$$

$$= -\frac{1}{2jk}\left(e^{-jk\pi} + e^{jk\pi}\right) + \frac{1}{2\pi k^2}\left(e^{-jk\pi} - e^{jk\pi}\right)$$

$$= -\frac{j}{j^2 k}\frac{e^{jk\pi} + e^{-jk\pi}}{2} - \frac{j}{\pi k^2}\frac{e^{jk\pi} - e^{-jk\pi}}{2j}$$

$$= \frac{j}{k}e^{jk\pi} \quad (\because e^{-jk\pi} = e^{jk\pi})$$

$k = 0$ のとき $\quad C_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t\, dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$

複素フーリエ級数展開の例(ノコギリ波)

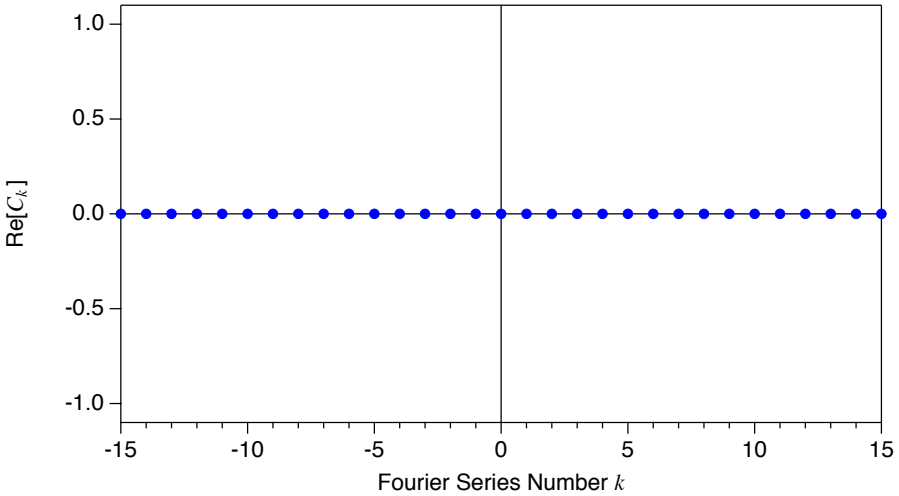
ノコギリ波：$f(t) = t \quad [-\pi, \pi] \ldots \omega_0 = 1$

$k \neq 0$ のとき $C_k = \dfrac{j}{k} e^{jk\pi}$

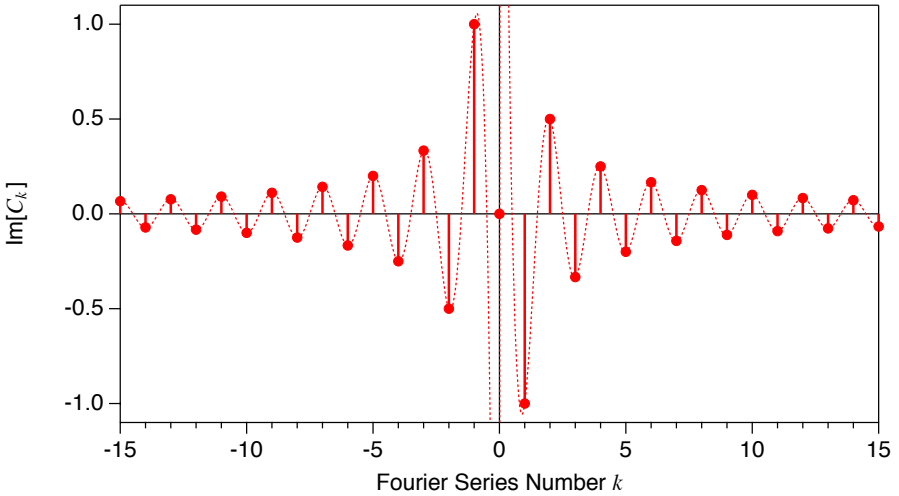
$k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \cdots$ のとき $e^{jk\pi} = -1, 1, -1, 1, \cdots$

$k = 0$ のとき $C_0 = 0$

$f(t)$ が奇関数のとき
C_k は純虚数



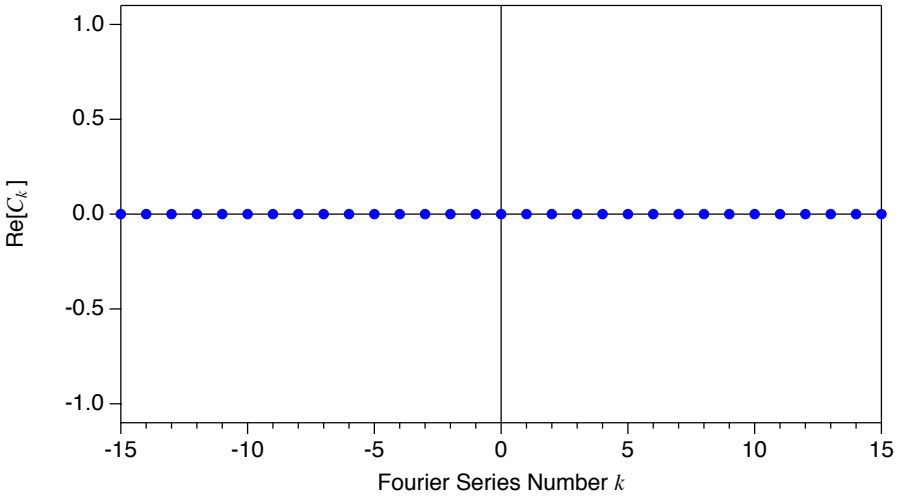
C_k の実部



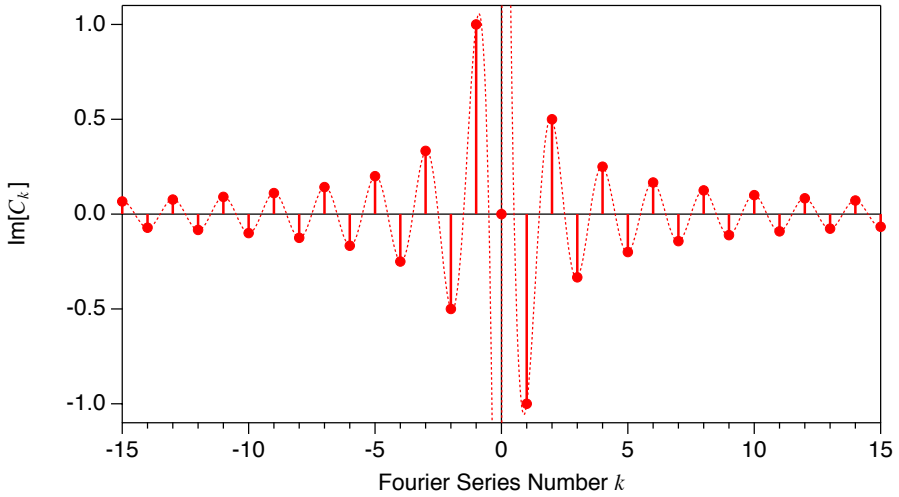
C_k の虚部

複素フーリエ級数展開の例(ノコギリ波)

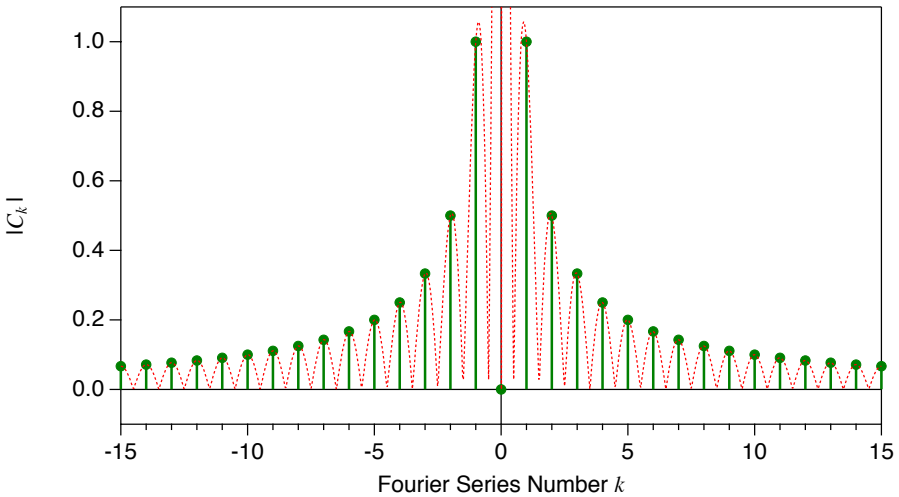
ノコギリ波：$f(t) = t \quad [-\pi, \pi] \ldots \omega_0 = 1$



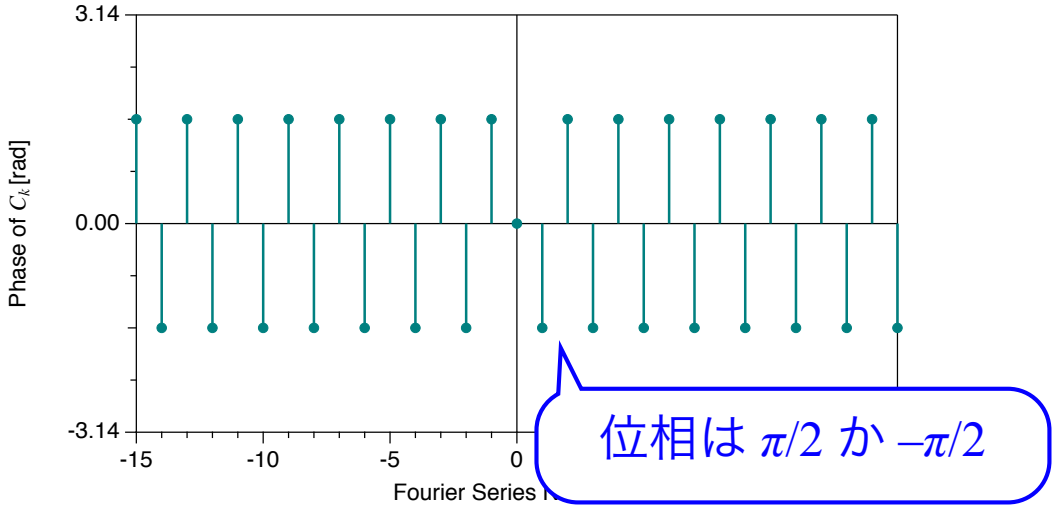
C_k の実部



C_k の虚部



振幅スペクトル



位相スペクトル

複素フーリエ級数展開の例(矩形波)

矩形波：$f(t) = \pi\ (|t| \leqq 1),\ = 0\ (|t| > 1)\ \ [-\pi, \pi]\ \ldots\ \omega_0 = 1$

$k \neq 0$ のとき

$$C_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-jkt}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \pi\, e^{-jkt}\, dt$$

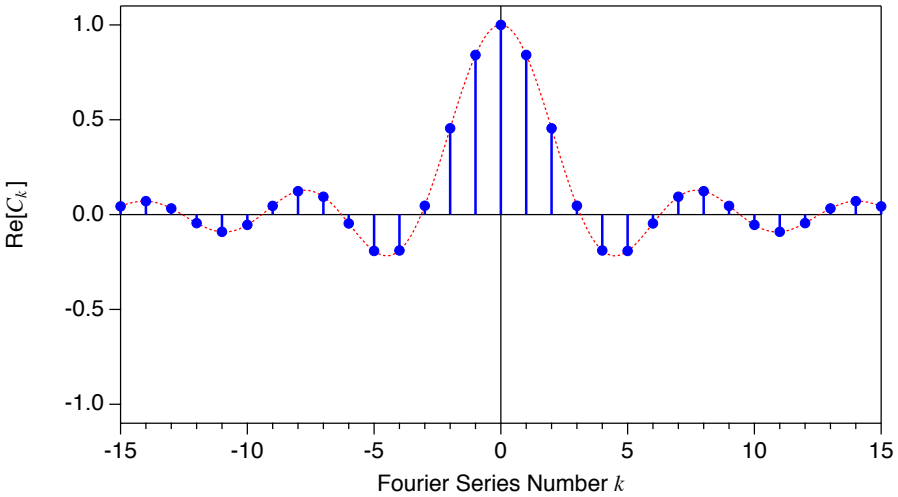
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-jkt}}{-jk}\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{2jk}\left(e^{-jk} - e^{jk}\right)$$

$$= \frac{1}{k}\frac{e^{jk} - e^{-jk}}{2j} = \frac{\sin k}{k}$$

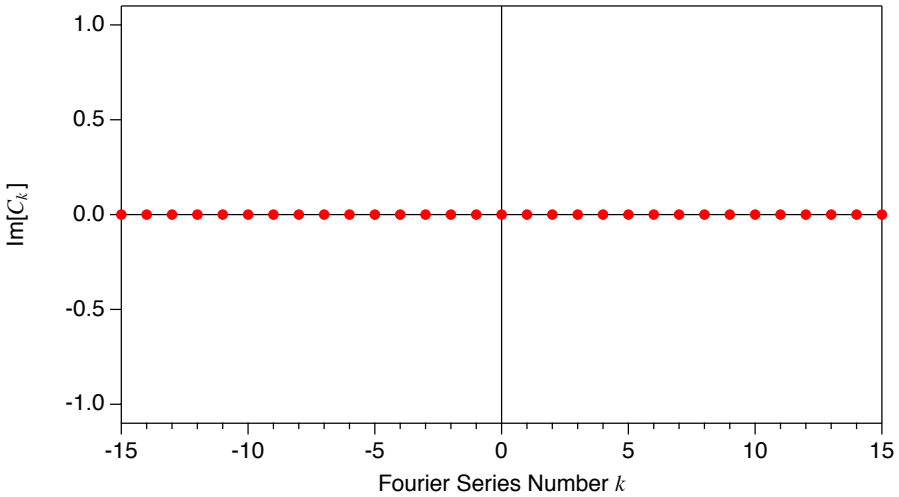
$f(t)$ が偶関数のとき
C_k は実数

$k = 0$ のとき

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \pi\, dt = 1$$



C_k の実部



C_k の虚部

複素フーリエ級数展開の例(矩形波)

矩形波：$f(t) = \pi\ (|t| \leqq 1),\ = 0\ (|t| > 1)\ \ [-\pi, \pi]\ \ldots\ \omega_0 = 1$

$k \neq 0$ のとき

$$C_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-jkt}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \pi\, e^{-jkt}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-jkt}}{-jk}\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{2jk}\left(e^{-jk} - e^{jk}\right)$$

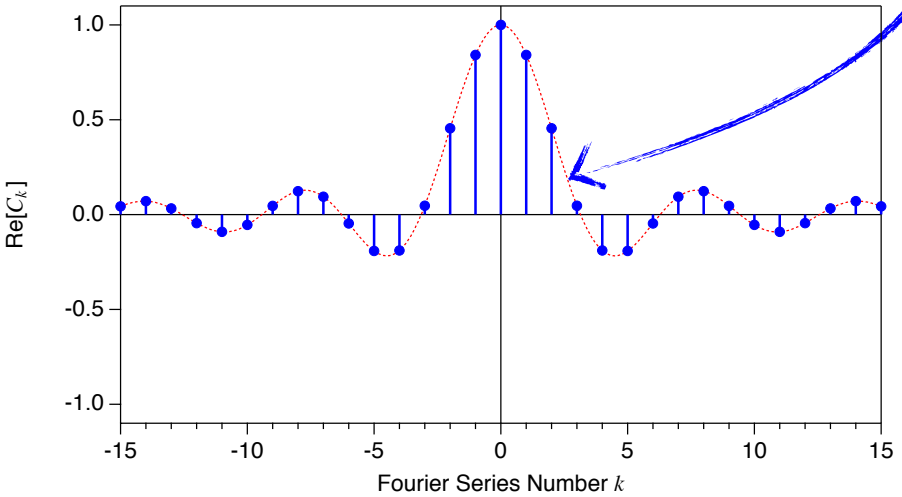
$$= \frac{1}{k}\,\frac{e^{jk} - e^{-jk}}{2j} = \frac{\sin k}{k}$$

$f(t)$ が偶関数のとき
C_k は実数

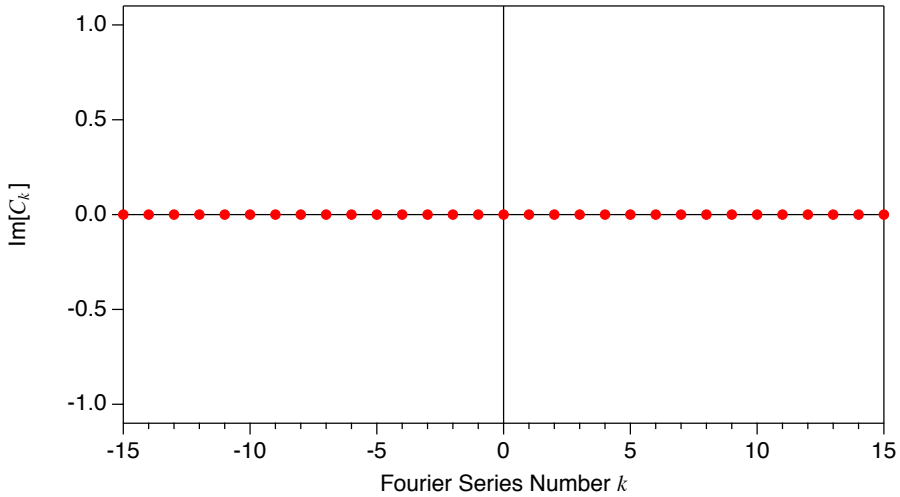
$k = 0$ のとき

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \pi\, dt = 1$$

sinc 関数



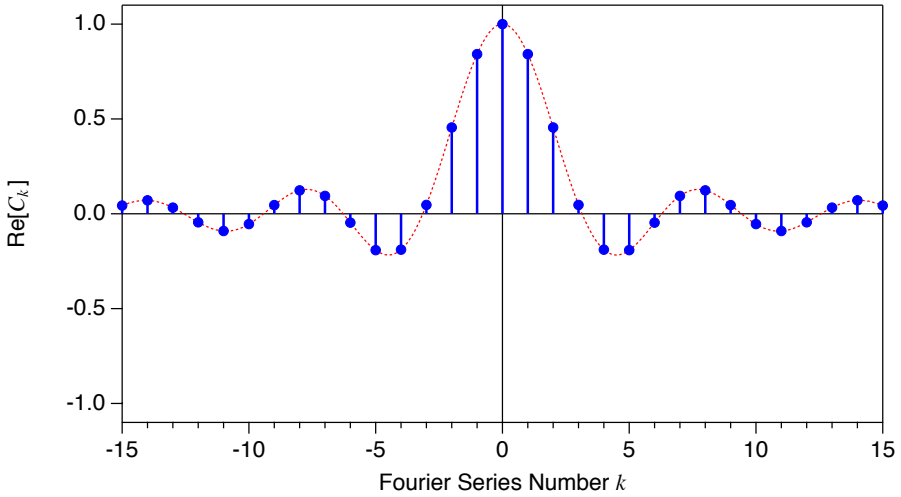
C_k の実部



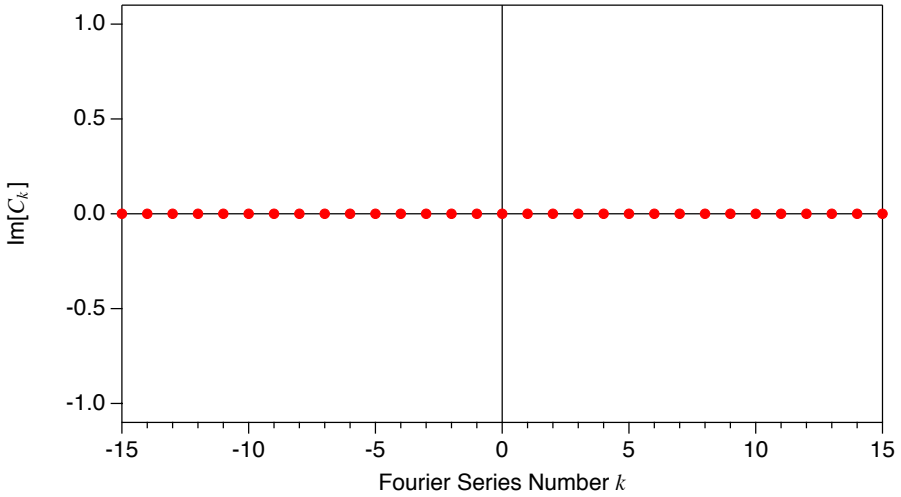
C_k の虚部

複素フーリエ級数展開の例(矩形波)

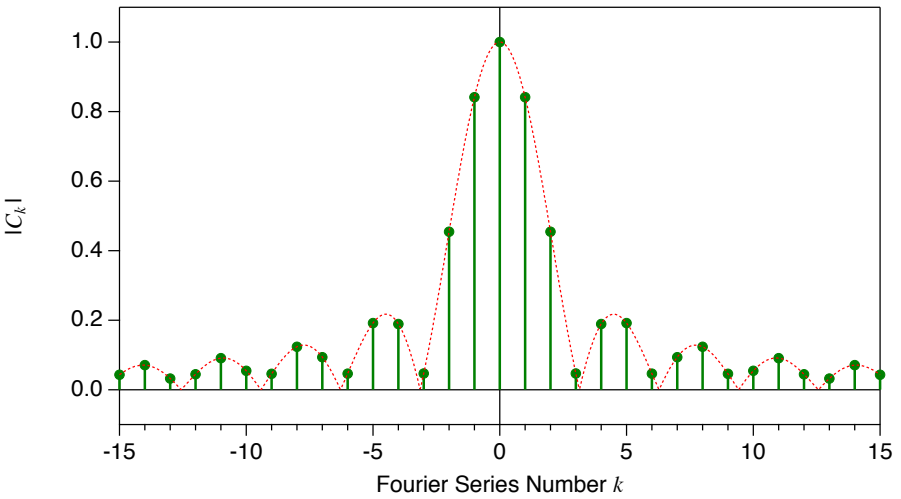
矩形波：$f(t) = \pi\ (|t| \leqq 1),\ = 0\ (|t| > 1)\ \ [-\pi, \pi]$ … $\omega_0 = 1$



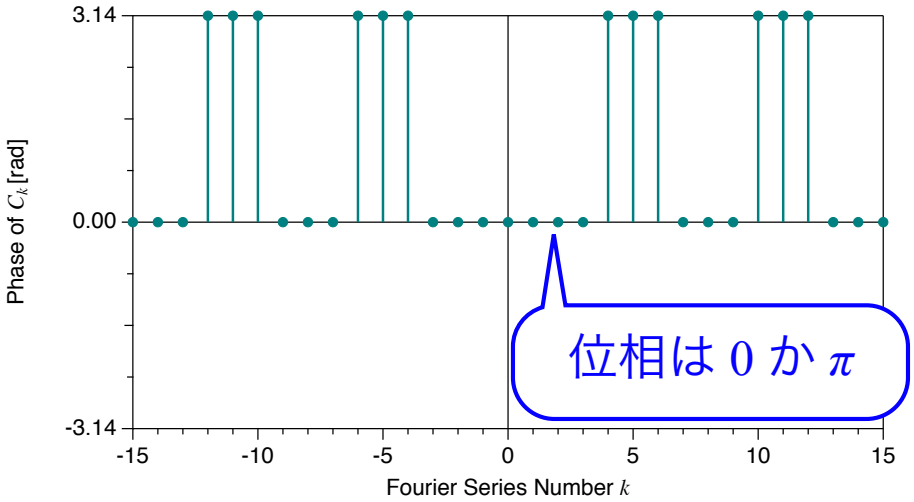
C_k の実部



C_k の虚部

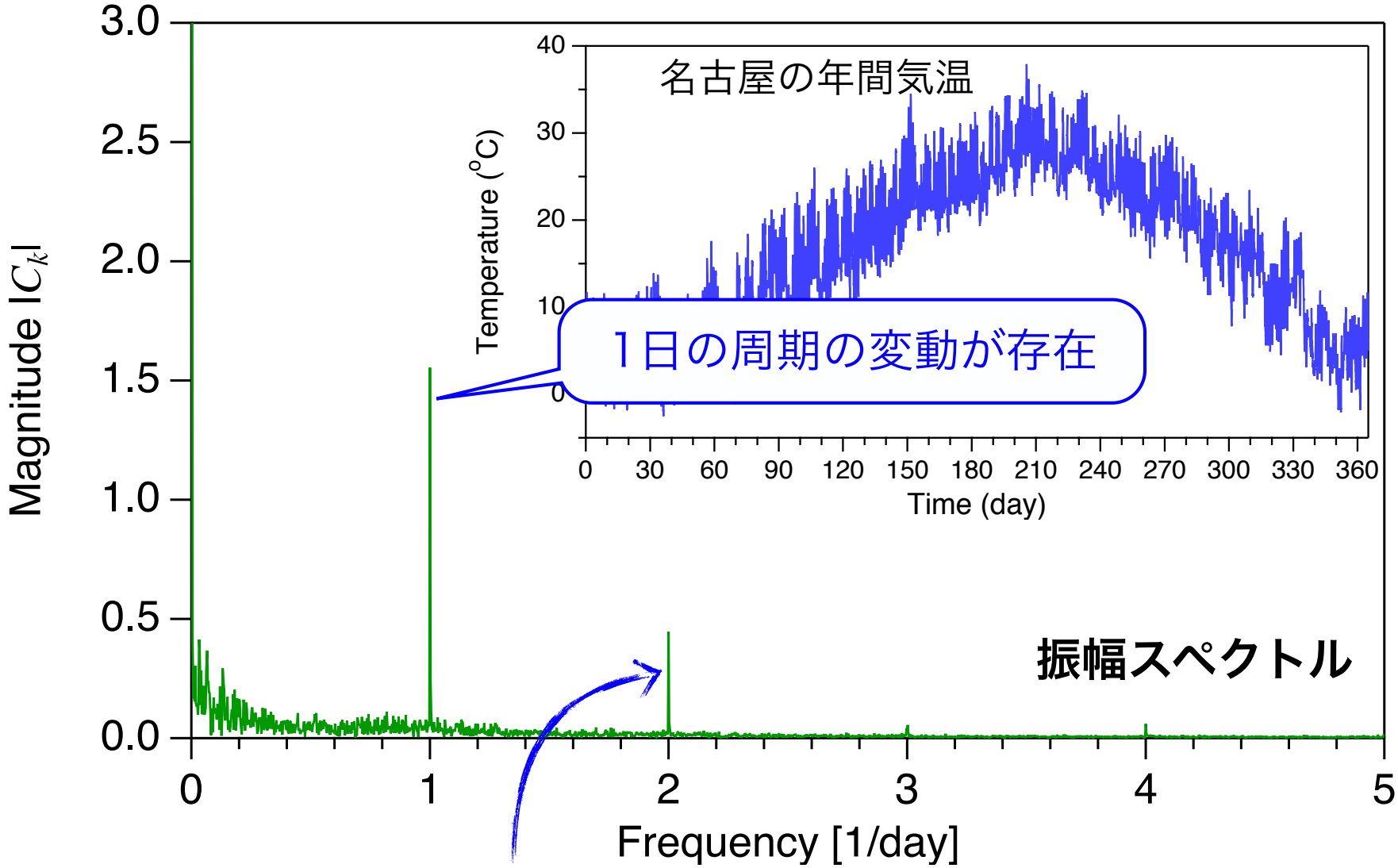


振幅スペクトル



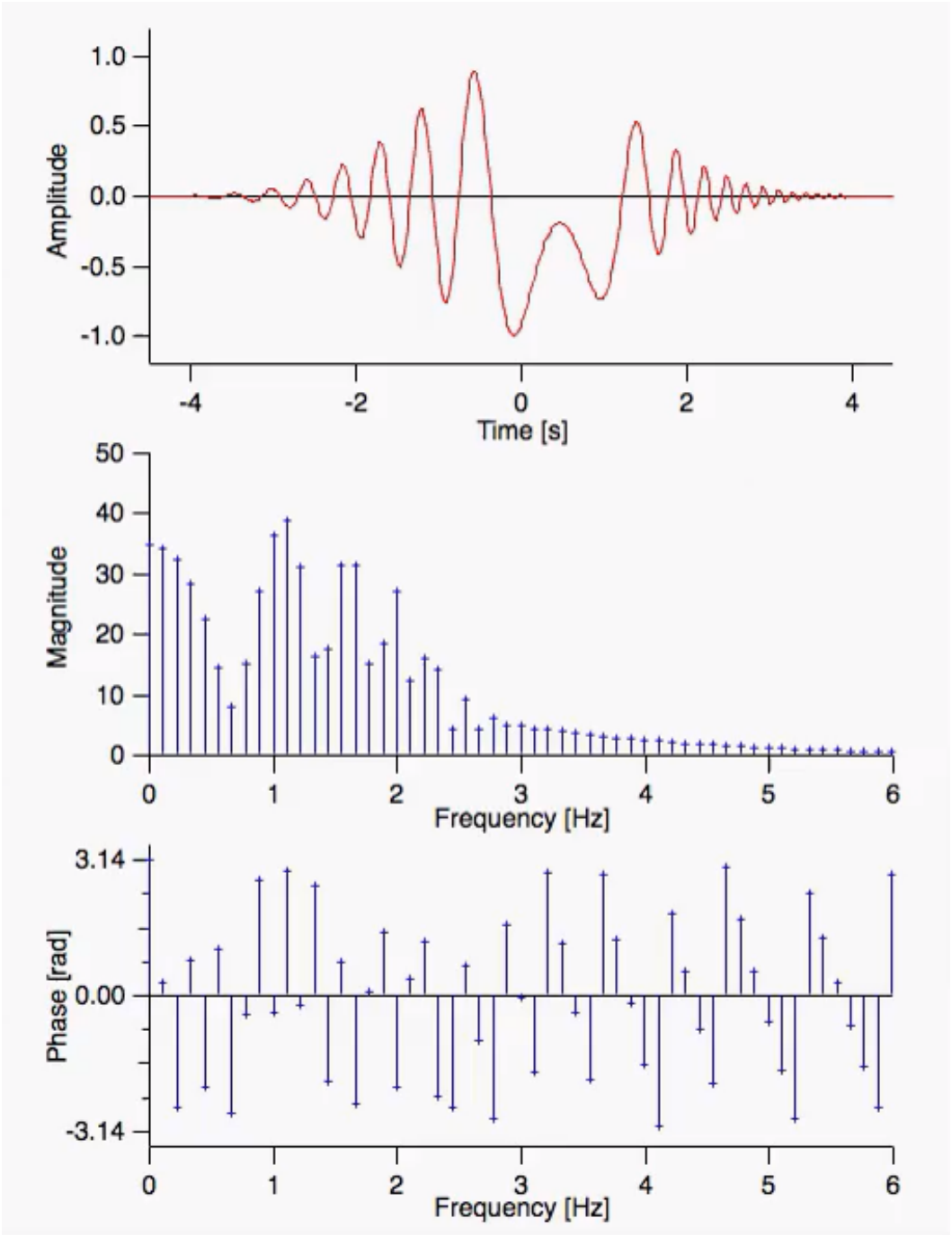
位相スペクトル

複素フーリエ級数展開の実例



ここは半日周期の位置であるが、半日単位の変動がある
という意味ではなく、1日周期の変動の第2高調波である。
(1日の気温変動は正確な正弦波ではないため)

信号の拡大縮小とフーリエ級数展開



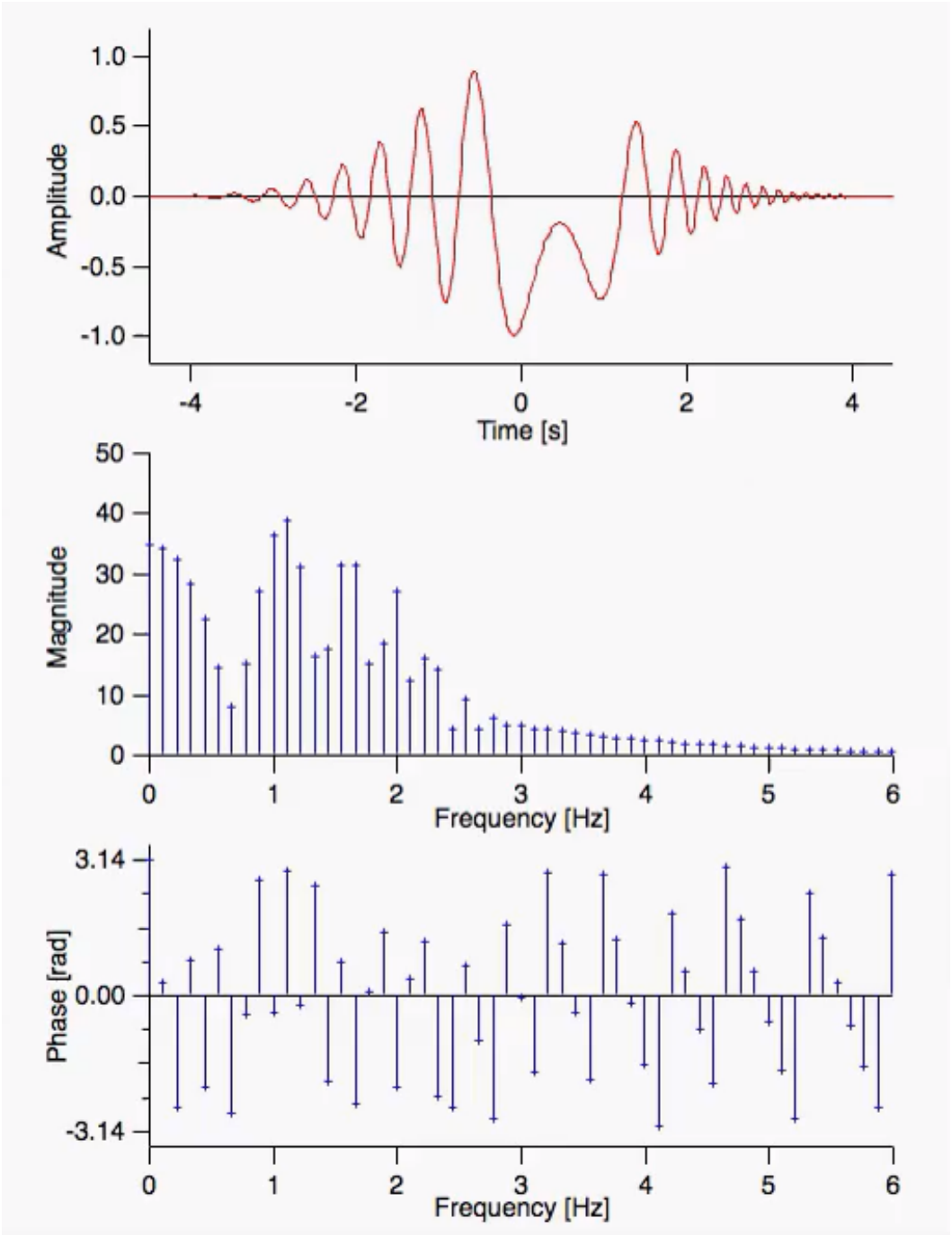
信号の形は変えずに
振幅を拡大・縮小

振幅スペクトルが
比例して拡大縮小

$f(t) \to \alpha f(t)$ で $C_k \to \alpha C_k$

位相スペクトルは
変化しない

信号の移動(ずれ)とフーリエ級数展開



信号を時間軸方向に
移動(原点をずらす)

振幅スペクトルは
変化しない

位相スペクトルは
ずれに応じて変化

高周波数ほど位相の移動速度が早い

信号の加算とフーリエ級数展開

$f(t)$ のフーリエ係数を C_k、$g(t)$ のフーリエ係数を D_k とするとき、

$\alpha f(t) + \beta f(t)$ のフーリエ係数 E_k を求めてみる。

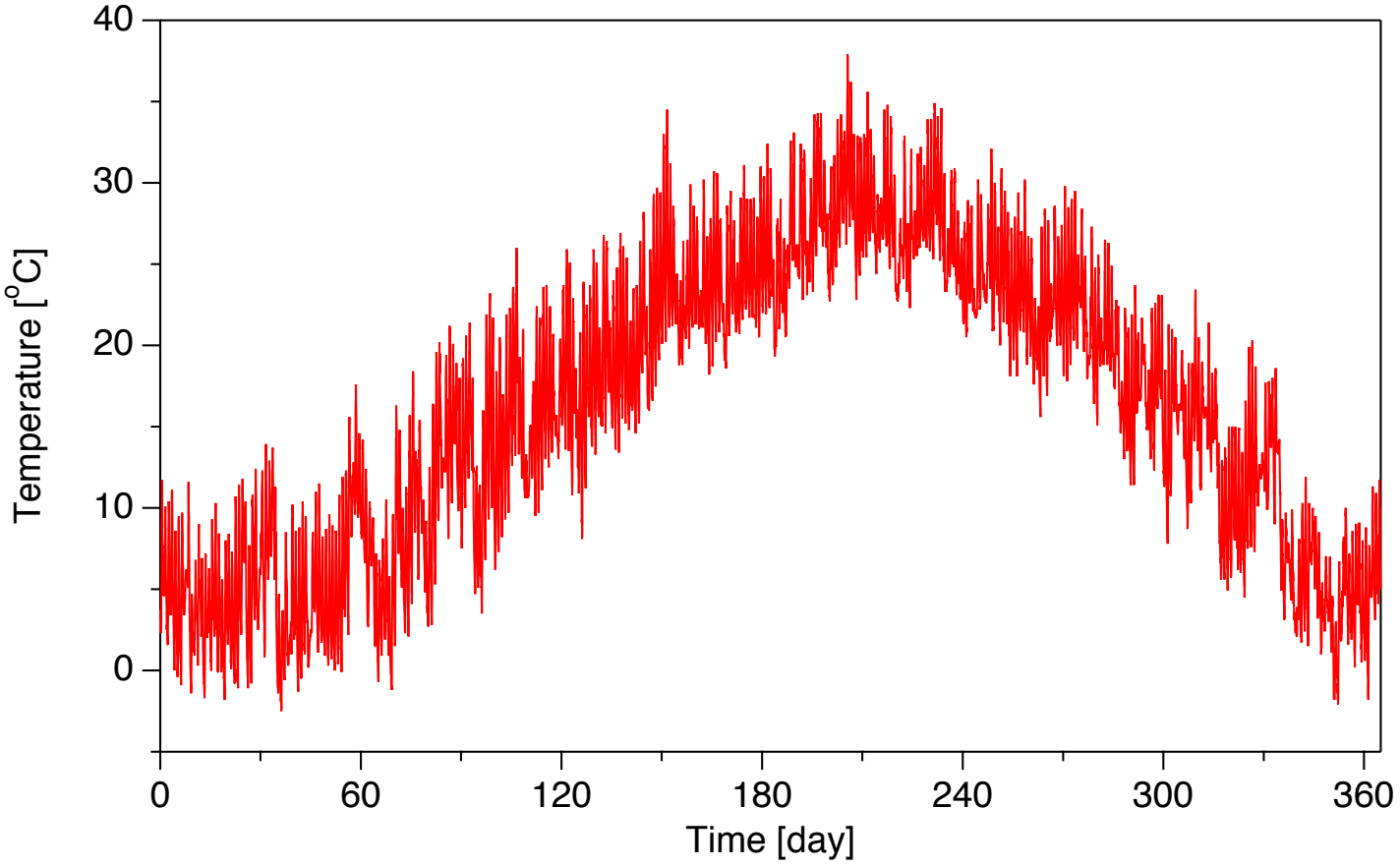
$$
\begin{aligned}
E_k &= \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} \{\alpha f(t) + \beta g(t)\}\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \\
&= \alpha \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt + \beta \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} g(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \\
&= \alpha C_k + \beta D_k
\end{aligned}
$$

関数を線形結合すると、
フーリエ係数も同じ係数の線形結合となる。

フーリエ級数展開による信号の近似

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow{N\text{次近似}} f_N(t) = \sum_{-N}^{N} C_k\, e^{jk\omega_0 t}$$

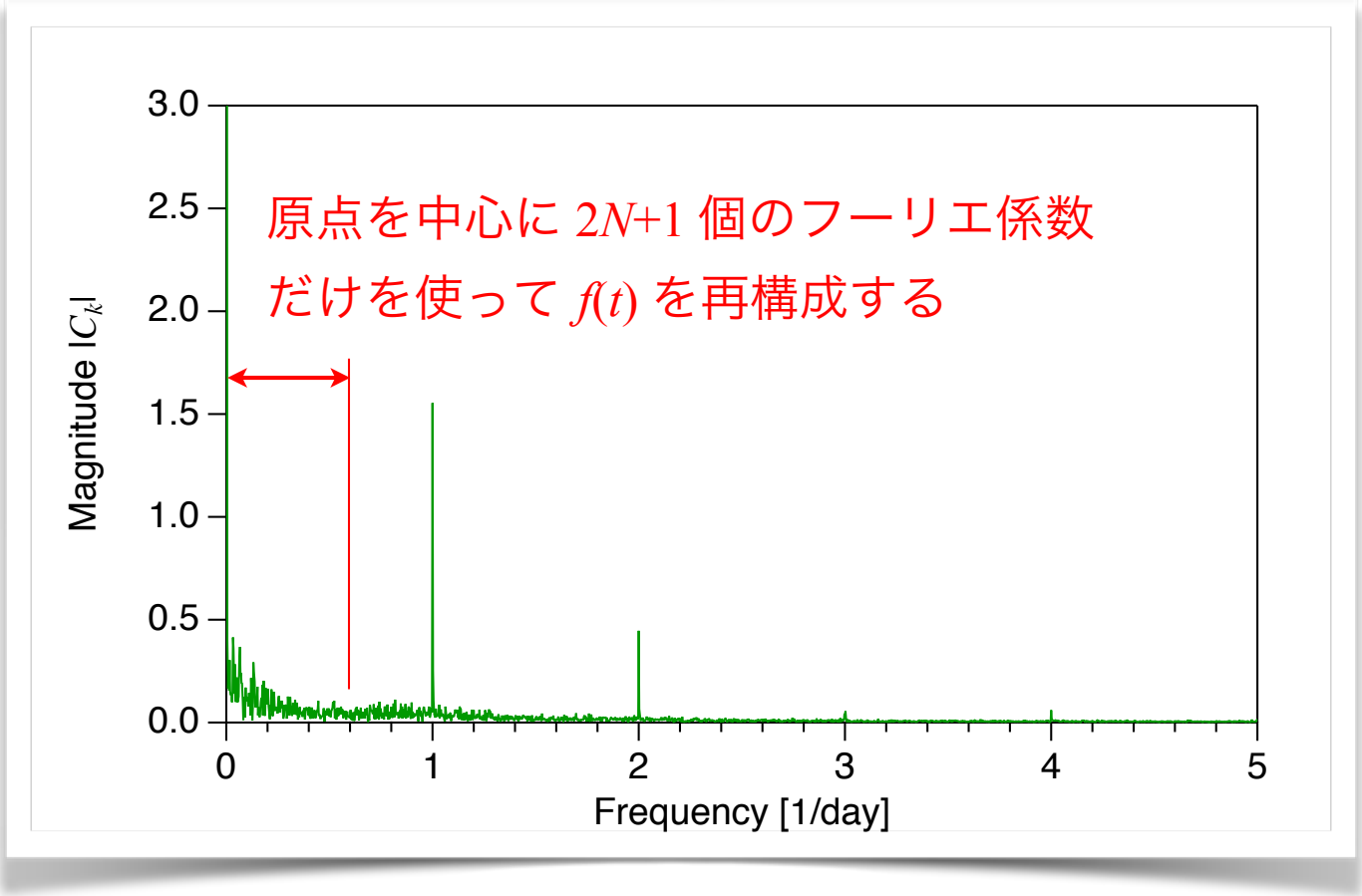
名古屋の年間気温をフーリエ級数展開でN次近似する



フーリエ級数展開による信号の近似

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow{N\text{ 次近似}} f_N(t) = \sum_{-N}^{N} C_k\, e^{jk\omega_0 t}$$

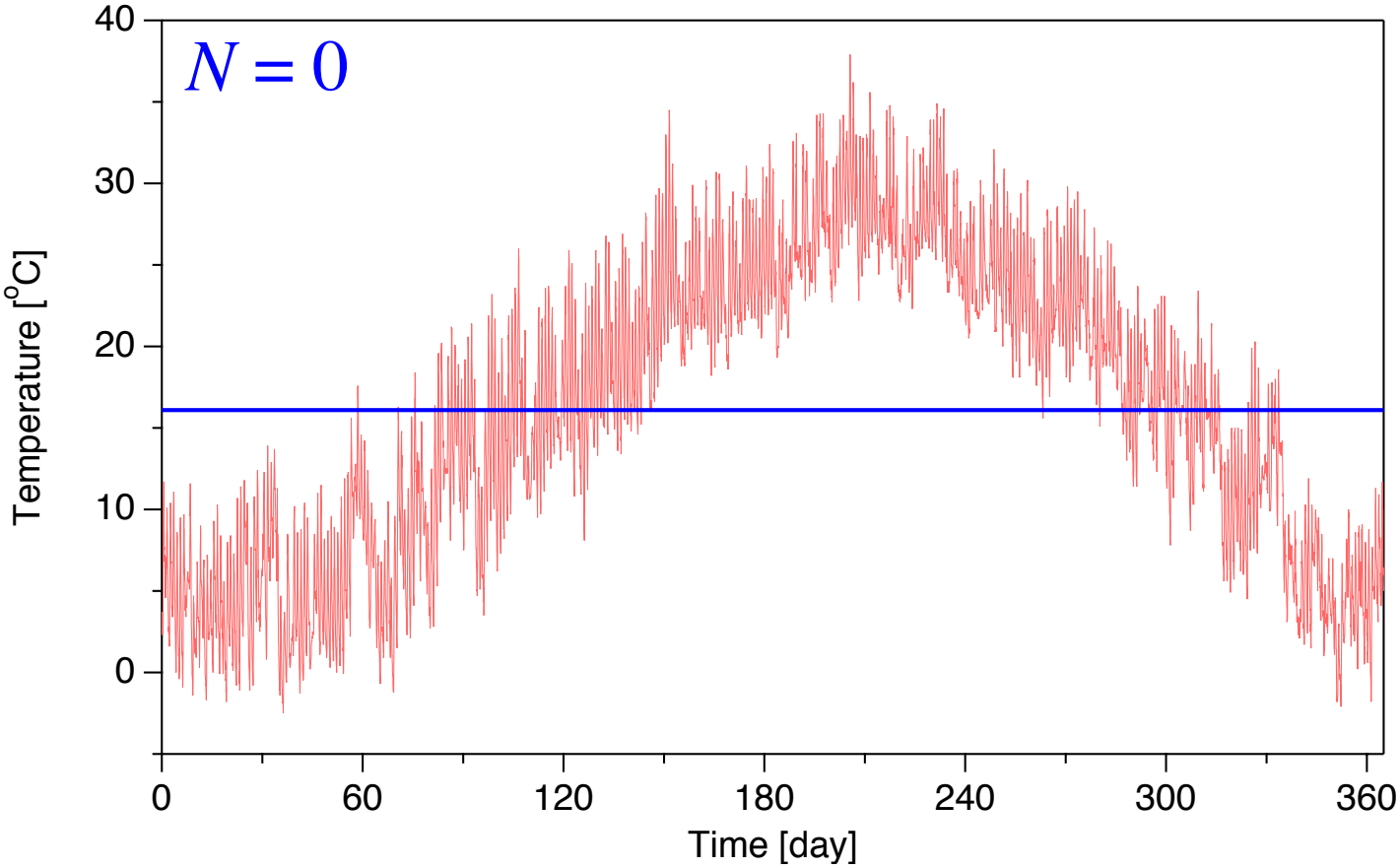
名古屋の年間気温をフーリエ級数展開でN次近似する



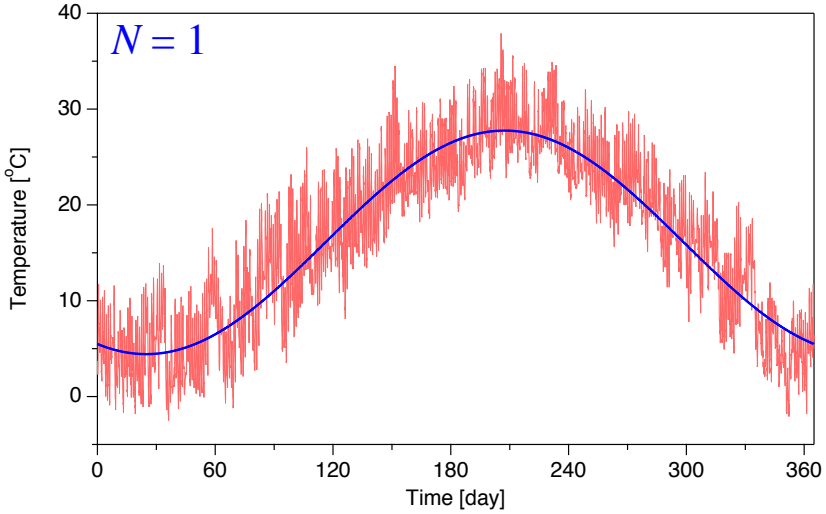
フーリエ級数展開による信号の近似

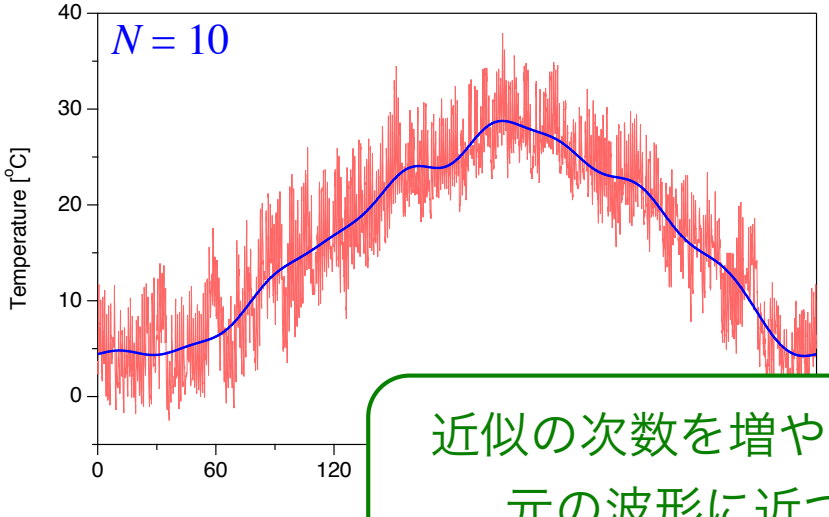
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow{N\text{次近似}} f_N(t) = \sum_{-N}^{N} C_k\, e^{jk\omega_0 t}$$

名古屋の年間気温をフーリエ級数展開でN次近似する

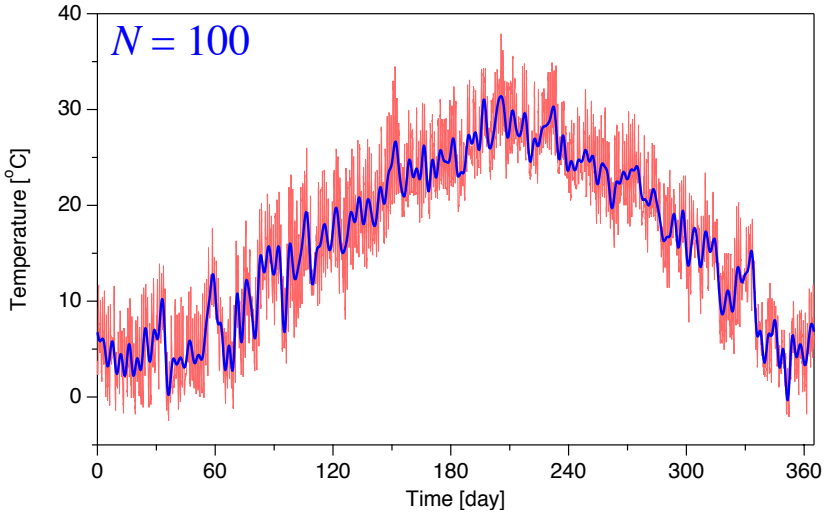


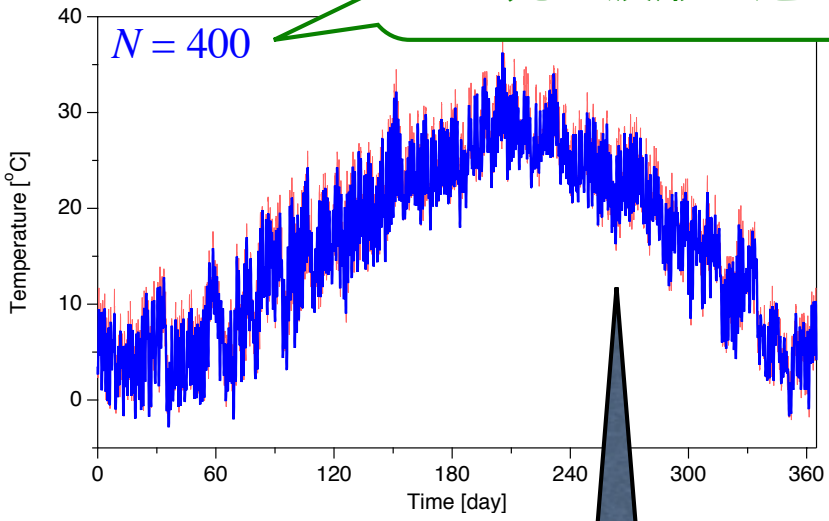
フーリエ級数展開による信号の近似





近似の次数を増やすと、
元の波形に近づく





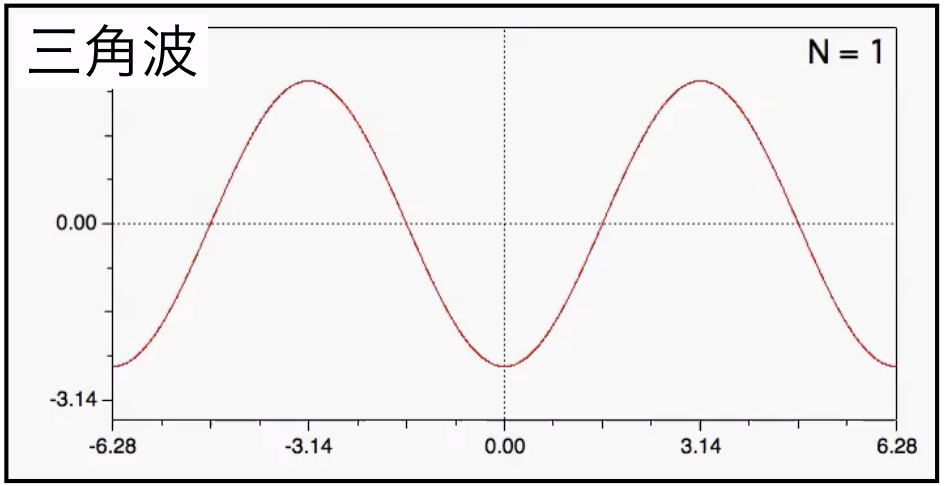
元データは24×365=8760点であるが、400点の複素フーリエ係数があれば、ほぼ元のデータを再現できる！

→ **データ圧縮(非可逆)の基本原理**

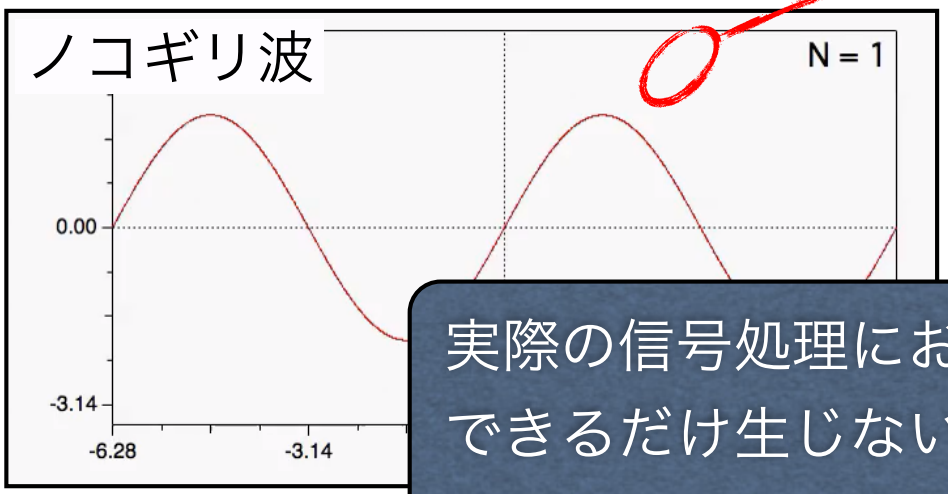
フーリエ級数展開の限界

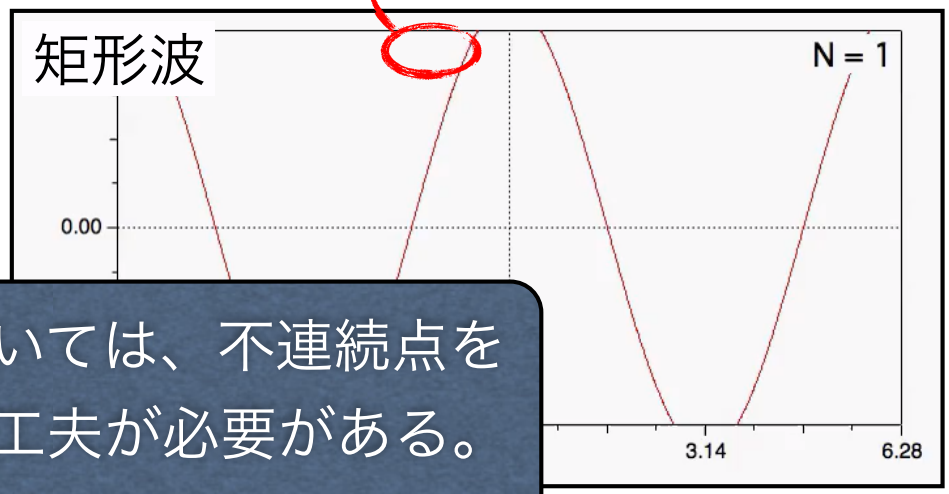
角周波数 ω_0 の任意の関数 $f(t)$ はフーリエ級数展開で表現できる

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}$$ … 無限個の和で完全に $f(t)$ を表現できるのか？



不連続点では、振動を生じ、Nを増やしても振動振幅が減少しない
→ **ギプス現象**

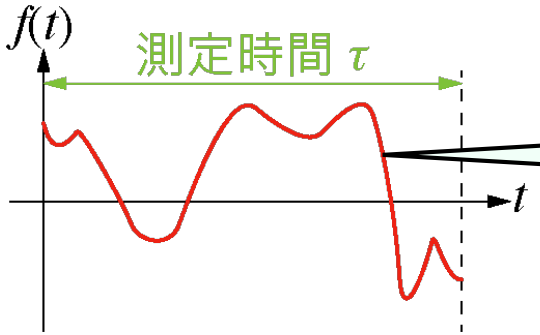




実際の信号処理においては、不連続点をできるだけ生じない工夫が必要がある。

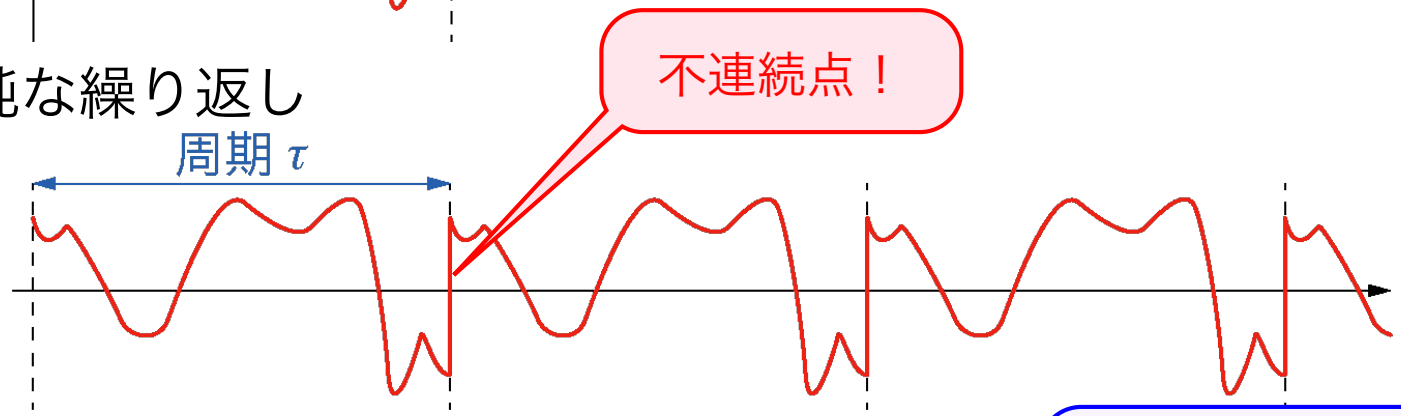
フーリエ級数展開の限界

実際の信号処理においては、不連続点をできるだけ生じない工夫が必要がある。



一般に、測定データは特定の周期を持たないが、
フーリエ級数展開は周期関数に対してのみ適応可能
→ 測定データの周期化が必須

・単純な繰り返し



・線対称の折り返し→偶関数化