ディジタル信号処理：前半の重要ポイント

1　信号処理の基礎

- **アナログ信号・ディジタル信号：**連続的な信号をアナログ信号、離散的な信号をディジタル信号という。アナログ信号をディジタル化することを AD 変換、逆を DA 変換 という。

- **サンプリングと量子化：**変数 (時間・位置) の離散化を サンプリング、信号 (測定値) の離散化を 量子化 という。サンプリングに際しては、信号に含まれる最大周波数 (f_c) の 2 倍以上 の周波数を用いる必要があり、限界周波数 $2f_c$ を ナイキスト周波数 という。ナイキスト周波数より低い周波数でサンプリングを行うと、実際の信号には含まれていない低周波信号を観察することがあり、この現象を エイリアシング という。

- **ビットとバイト：**一つのディジタル信号で表現できる数値の数は 2 進数の桁数であるビット (bit) を単位として表現される (量子化ビット数)。また、8 ビットを 1 バイト (Byte) と呼び、バイトを単位として用いることも多い。n ビットで表現できる数値の数は 2^n 個、n バイトで表現できる数値の数は $2^{8n} = 256^n$ である。

- **ディジタル画像：**ディジタル化された画像信号は 画素 と呼ばれる輝点の集合として表現される。画素の明るさの段階 (輝度信号のビット数) を 階調 という。色情報を持つ画像を カラー画像、明るさのみの情報を持つ画像を モノクロ画像、1 画素あたり 1 ビットの情報のみ持つものを 二値画像 という。二値画像は画像認識などの処理でよく使われる。

- **不規則信号・確定信号：**ある時点までの測定結果からその後を予測できないものを 不規則信号、予測可能なもの (数学関数で表現できるもの) を 確定信号 という。周期信号は確定信号の一種であり、代表的なものとして正弦波、三角波、方形波 (矩形波)、ノコギリ波などがよく使われる。正弦波は $A\sin(\omega t+\delta)$ の式で表現できるが、A は振幅、ω は角周波数、δ は位相 と呼ばれる。また、$\omega/(2\pi)$ は周波数、$2\pi/\omega$ は周期 と呼ばれる。

- **孤立波：**限られた時間範囲内のみに存在する信号を 孤立波 という。パルス波は孤立波の一種である。

2　信号の平滑化、ノイズの圧縮

- **信号の平滑化：**測定信号に含まれるノイズを低減する手法の一つに平滑化 (スムージング) がある。スムージングには種々の手法があるが、よく使われるものに単純移動平均 (ボックスフィルタ)、加重移動平均 (ガウシアンフィルタ、二項フィルタ)、メジアン (中央値) フィルタがある。

- **単純移動平均：**信号 $f_i = (f_0, f_1, f_2, \cdots, f_{N-1})$ があるとき、単純移動平均の結果 g_i は $\boxed{g_i = \dfrac{1}{2K+1}\displaystyle\sum_{j=-K}^{K} f_{i+j}}$ で与えられる ($K \leqq i < N-K$)。ここで K はフィルタサイズと呼ばれる。$i < K$、$i \geqq N-K$ の範囲はそのままでは計算できないが、回りこみ終端条件 (周期境界条件) や折り返し終端条件を用いることで有限のデータを周期化して計算することが一般的である。

- **加重移動平均：**信号 $f_i = (f_0, f_1, f_2, \cdots, f_{N-1})$ があるとき、加重移動平均の結果 g_i は $\boxed{g_i = \displaystyle\sum_{j=-K}^{K} w_j f_{i+j}}$ で与えられる ($K \leqq i < N-K$)。ここで w_j は重み関数であり、$\displaystyle\sum_{j=-K}^{K} w_j = 1$ となるように与える。w_j としてガウス分布 ($w_j = A\exp(-j^2/K)$) を用いるものをガウシアンフィルタ、二項分布 ($w_j = A({}_{2K+1}\mathrm{C}_{j+(2K+1)/2})$) を用いるものを二項フィルタという。$K$ が大きいとき、ガウス分布と二項分布はほぼ等しくなるので、実用上は両者の差はほとんどない。

- **メジアンフィルタ：**信号 $f_i = (f_0, f_1, f_2, \cdots, f_{N-1})$ があるとき、加重移動平均の結果 g_i は $g_i = \underset{j=-K}{\overset{K}{\mathrm{med}}} f_{i+j}$ で与えられる ($K \leqq i < N-K$)。ここで med は指定範囲内の中央値 (メジアン) を意味する (この表記は一般的ではない)。メジアンフィルタを用いると、突発的なノイズ (ショットノイズ) を効果的に低減できる。

- **同期加算：**周期信号に含まれるノイズを圧縮する方法。i 番目の周期の測定信号を $f_i(t) = s(t) + n_i(t)$ (ここで $s(t)$ は真の信号、$n_i(t)$ は i 番目の周期に乗っているノイズ) としたとき、$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i(t) = s(t)$ となる性質を利用してノイズのみを圧縮し、真の信号を検出する。

3　多次元ベクトルのノルム・内積・相関係数、正規直交基を用いたベクトルの展開

2 つの N 次元のベクトル $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_N)$、$\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, \cdots, g_N)$ があるとき、

- **ノルム：** $\boxed{\|\boldsymbol{f}\| = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i^2}}$
- **内積：** $\boxed{< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} >= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i\, g_i}$
- **相関係数：** $\boxed{r = \frac{< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} >}{\|\boldsymbol{f}\|\,\|\boldsymbol{g}\|} = \sum_{i=1}^{N} f_i\, g_i \Big/ \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{N} f_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{N} g_i^2} \right)}$
- **正規直交基：** N 次元のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_i = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_N\}$ が、$\boxed{< \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j >= \delta_{ij}}$ (δ_{ij} はクロネッカーのデルタ) の条件を満たすとき、$\boldsymbol{v}_i$ を正規直交基という。正規直交基を用いると、任意の N 次元ベクトルは $\boxed{\boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{N} C_i \boldsymbol{v}_i}$ の形で展開することができ、このときの係数は $\boxed{C_i =< \boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_i >}$ で求めることができる。

4　関数のノルム・内積・相関係数、正規直交関数系を用いた関数の展開

区間 $[t_1, t_2]$ で定義された 2 つの関数 $f(t)$、$g(t)$ があるとき、

- **ノルム：** $\boxed{\|f(t)\| = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\, dt}}$
- **内積：** $\boxed{< f(t), g(t) >= \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, g(t)\, dt}$
- **相関係数：** $\boxed{r = \frac{< f(t), g(t) >}{\|f(t)\|\,\|g(t)\|} = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, g(t)\, dt \Big/ \left(\sqrt{\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\, dt} \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} g^2(t)\, dt} \right)}$
- **正規直交関数系：** 無限個の関数の組 $\phi_i(t) = \{\phi_0(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \cdots\}$ が、$\boxed{< \phi_i(t), \phi_j(t) >= \delta_{ij}}$ の条件を満たすとき、$\phi_i(t)$ を正規直交関数系という。正規直交関数系を用いると、任意の関数は $\boxed{f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i\, \phi_i(t)}$ の形で展開することができ、このときの係数は $\boxed{C_i =< f(t), \phi_i(t) >}$ で求めることができる。

5　相関関数

2 つの関数 $f(t)$、$g(t)$ があるとき、

- **相互相関関数：** $\boxed{R_{fg}(\tau) =< f(t),\, g(t+\tau) >}$ 二つの信号 (関数) 間の時間的あるいは空間的なずれが得られる。
- **自己相関関数：** $\boxed{R_{ff}(\tau) =< f(t),\, f(t+\tau) >}$ 信号 (関数) に含まれている時間的あるいは空間的な周期が得られる。

6　中間試験に関して

- 中間試験の範囲は教科書の第 1 章〜第 4 章である。本プリントだけではなく演習 1〜4 も復習しておくこと。
- 数式は、形ではなく、その意味を正しく理解して覚えること (記号や数値は問題に応じて変わることがある)。特に、枠で囲まれた数式は重要である。
- 中間試験では数値計算問題があるため、関数電卓 (計算機能のみ) の持ち込みは認める。スマホなど、通信・記憶機能を持つ機器の持ち込みは認めない。
- 本資料および演習問題の解答例を以下からダウンロードできるので、適宜参考とすること。

http://www.surf.nuqe.nagoya-u.ac.jp/members/nakahara/DSP_summary1.pdf

ディジタル信号処理 演習 1

学籍番号： 学籍番号　　氏名： 氏名　　評価： A/B/C

問 1-1

以下の文中の 答 内を適切な言葉で埋めよ (同じ言葉が複数回使われることもある)。また、【】内の選択肢のうち、最も適切なものを選んで丸を付けよ。

- 連続なアナログ信号を不連続なディジタル信号に変換することを 離散 化という。変数の 離散 化を サンプリング といい、測定値の 離散 化を 量子化 という。
- ディジタル化された画像信号は輝点の集合として表現されるが、個々の輝点を 画素 といい、この数を 画素数 という。また、輝点の明るさ (輝度) の段階を 階調 という。特に、輝度を 1 ビットで表現した画像は 【(a) カラー画像 (b) モノクロ画像 (c) 二値画像】[1] とよばれ、形状認識などの画像処理でよく利用される。
- アナログ信号をディジタル信号に変換するデバイスを AD 変換器といい、ディジタル信号をアナログ信号に変換するデバイスを DA 変換器という。
- 1 バイトは 8 ビットであり、1 バイトで表現できる値の数は 256 個である。また、2 バイトで表現できる値の数は 65536 個である。
- アナログ信号をディジタル信号に変換する際、アナログ信号に含まれる最も高い周波数が f_c であるとして、標本化の周波数は $2f_c$ 【(a) 以上 (b) 以下】[2] でなければいけない。また、この限界周波数のことを ナイキスト 周波数という。標本化の周波数が不適切であると、本来の信号には含まれない低周波信号を誤って観測してしまうことがあり、この現象を エイリアシング という。

問 1-2

(1) 1 チャンネルのモノラル音声信号を 8bit-20kHz でディジタル変換したとき、1 分間の音声信号のデータ量 (非圧縮の場合) は何 MB か (1MB=10^6 B として計算せよ)。

$1 \times (20 \times 10^3) \times 60 \div 10^6 =$ 1.2 MB

(2) 4K テレビ画像 (3840×2160 画素、RGB 各色 8bit、60Hz) の 1 分間の映像信号のデータ量 (非圧縮の場合) は何 GB か (1GB=10^9 B として計算せよ)。

$3840 \times 2160 \times 3 \times 60 \times 60 \div 10^9 =$ 89.6 GB

ディジタル信号処理 演習 2

学籍番号： 学籍番号　氏名： 氏名　評価： A/B/C

問 2-1

以下の文中の 答 内を適切な言葉で埋めよ (同じ言葉が複数回使われることもある)。

- 不規則信号とは、ある時点までの測定値から、その後の値を予測できない信号である。一方、 確定信号 は数学関数で表現できる信号で、将来の変動の予測が可能である。
- 代表的な周期信号の一つに正弦波があり、$f(t) = A\sin(\omega t + \theta)$ の形で書くことができる (t は時間)。ここで、A は 振幅 、ω は 角周波数 、θ は 位相 という。また、周波数は $\omega/2\pi$ と書ける。
- 限られた時間範囲内にのみ存在する信号を 孤立波 といい、単発のパルス信号は、その代表例である。

問 2-2

(1) フィルタサイズが K(中心および前後の K 個の範囲) のとき、N 個の測定値 f_i=($f_0, f_1, \cdots, f_{N-1}$) を単純移動平均した結果 g_i を数式を用いて表せ。但し、$K \leqq i < N - K$ の範囲とする。

$$g_i = \frac{1}{2K+1}\sum_{j=-K}^{K} f_{i+j}$$

(2) 10 個からなる測定値 f_i=(3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3) がある。フィルタサイズ K=2 を用いて単純移動平均した結果を g_i とした時、g_3 (4 つ目) 及び g_7 (8 つ目) の値を求めよ。

$$g_3 = \frac{1}{5}(1+4+1+5+9) = 4 \qquad g_7 = \frac{1}{5}(9+2+6+5+3) = 5$$

問 2-3

同期加算によって周期信号に含まれるノイズが圧縮される原理を、数式を用いて説明せよ。

真の周期信号を $s(t)$、ノイズを $n_i(t)$ とすると、測定される信号 $f_i(t)$ は $f_i(t) = s(t) + n_i(t)$ となる。同期加算によって N 周期分の加算平均を行うと、

$$\overline{f(t)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} s(t) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_i(t) = s(t) + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_i(t)$$

ここで、ノイズの無限回の平均は 0 であるので、$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} n_i(t) \to 0$ 。従って、$N \to \infty$ 回の同期加算は、

$$\lim_{N\to\infty}\overline{f(t)} = s(t)$$

すなわち、十分な回数の加算平均を行えば、ノイズ成分を圧縮して真の信号のみを取り出すことができる。

ディジタル信号処理 演習 3

学籍番号： 学籍番号　　氏名： 氏名　　評価： A/B/C

問 3-1

2 つの N 次元のベクトル $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_N)$、$\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, \cdots, g_N)$ があるとき、

(ア) $\boldsymbol{f}$ のノルム $\|\boldsymbol{f}\|$ を成分を用いて書け。

$$\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i^2}$$

(イ) $\boldsymbol{f}$ と $\boldsymbol{g}$ の内積 $<\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}>$ を成分を用いて書け。

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i\, g_i$$

(ウ) $\boldsymbol{f}$ と $\boldsymbol{g}$ の相関係数 r を $\boldsymbol{f}$ と $\boldsymbol{g}$ を用いて書け。

$$\frac{<\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}>}{\|\boldsymbol{f}\|\,\|\boldsymbol{g}\|}$$

(エ) N 次元の正規直交基 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_N\}$ を用いて $\boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{N} C_i\, \boldsymbol{v}_i$ と表すとき、

C_i を $\boldsymbol{f}$ と $\boldsymbol{v}$ を用いて書け。

$$<\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_i>$$

問 3-2

2 つの関数 $f(t)$、$g(t)$ があるとき、変数 t が t_1 から t_2 の範囲における

(ア) $f(t)$ のノルム $\|f(t)\|$ を書け。

$$\sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\, dt}$$

(イ) $f(t)$ と $g(t)$ の内積 $<f(t), g(t)>$ を書け。

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\, g(t)\, dt$$

(ウ) $f(t)$ と $g(t)$ の相関係数 r を書け。

$$\frac{<f(t), g(t)>}{\|f(t)\|\,\|g(t)\|}$$

(エ) 正規直交関数系 $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \cdots\}$ を用いて $f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i\, \phi_i(t)$ と表すとき、

C_i を $f(t)$ と $\phi(t)$ を用いて書け。

$$<f(t), \phi_i(t)>$$

問 3-3

5 点からなる 2 つのディジタル信号 $\boldsymbol{a} = (2, -4, -2, 0, -1)$、$\boldsymbol{b} = (0, -1, 9, -3, 3)$ があるとき、これらの相関係数 r を求めよ。

$$r = \frac{<\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}>}{\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{2\times 0 + (-4)\times(-1) + (-2)\times 9 + 0\times(-3) + (-1)\times 3}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-2)^2 + 0^2 + (-1)^2}\,\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 9^2 + (-3)^2 + 3^2}} = -0.34$$

(裏面へ続く)

問 3-4

原点対称の区間 $[-a, a]$ で定義された二つの関数 $f(t) = t$ と $g(t) = t^2$ がある。以下の問いに答えよ。

(1) $f(t)$ と $g(t)$ のノルムを求めよ。

$$\|f(t)\| = \sqrt{\frac{1}{a-(-a)}\int_{-a}^{a} t^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{-a}^{a}} = \sqrt{\frac{1}{3}a^2} = \boxed{\frac{a}{\sqrt{3}}}$$

$$\|g(t)\| = \sqrt{\frac{1}{a-(-a)}\int_{-a}^{a} t^4 dt} = \sqrt{\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{5}t^5\right]_{-a}^{a}} = \sqrt{\frac{1}{5}a^4} = \boxed{\frac{a^2}{\sqrt{5}}}$$

(2) $f(t)$ と $g(t)$ が直交することを証明せよ。

$$< f(t), g(t) >= \frac{1}{a-(-a)}\int_{-a}^{a} t \cdot t^2 dt = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{4}t^4\right]_{-a}^{a} = \frac{1}{2a}\left(\frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{4}\right) = 0$$

となり、二つの関数の内積が 0 であるので、両関数は直交している。

問 3-5

$[-\pi, \pi]$ の範囲で定義された正規直交関数系 $\phi_i(t) = \{1, \sqrt{2}\sin(t), \sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}\sin(2t), \sqrt{2}\cos(2t), \cdots\}$ がある。関数 $f(t) = t$ を $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i \phi_i(t)$ の形に展開するとき、展開係数 C_0、C_1、C_2 を求めよ。

$$C_0 =< t, 1 >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\, dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-\pi}^{\pi} = \boxed{0}$$

$$C_1 =< t, \sqrt{2}\sin(t) >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2}t\sin(t)\, dt = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\, dt + \left[-t\cos t\right]_{-\pi}^{\pi}\right\} = \boxed{\sqrt{2}}$$

$$C_2 =< t, \sqrt{2}\cos(t) >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2}t\cos(t)\, dt = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\left\{-\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\, dt + \left[t\sin t\right]_{-\pi}^{\pi}\right\} = \boxed{0}$$

なお、C_1、C_2 導出時は部分積分法 $\int u' \cdot v\, dt = -\int u \cdot v'\, dt + u \cdot v$ で (1) $u' = \sin t$、$v = t$、(2) $u' = \cos t$、$v = t$ としている。

ディジタル信号処理 演習 4

学籍番号： 学籍番号　　氏名： 氏名　　評価： A/B/C

問 4-1

時間 t に対する 2 つの関数 $f(t)$、$g(t)$ があるとして、以下の問いに答えよ。

(ア) 相互相関関数 $R_{fg}(\tau)$ の式を書け。

$$R_{fg}(\tau) = < f(t),\ g(t+\tau) >$$

(イ) 自己相関関数 $R_{ff}(\tau)$ の式を書け。

$$R_{ff}(\tau) = < f(t),\ f(t+\tau) >$$

(ウ) 相互相関関数を用いると、どのような情報が得られるか書け。

二つの信号 (関数) 間の時間的あるいは空間的なずれが得られる。

(エ) 自己相関関数を用いると、どのような情報が得られるか書け。

信号 (関数) に含まれている時間的あるいは空間的な周期が得られる。

問 4-2

区間 $[0, 2\pi]$ で定義された二つの関数 $f(t) = \sin t$ と $g(t) = \cos t$ がある。二つの関数の相互相関関数 $R_{fg}(\tau)$ を求めよ (規格化しなくてよい)。

$$\begin{aligned} R_{fg}(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin t \cdot \cos(t+\tau)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin t\,(\cos t \cos\tau - \sin t \sin\tau)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos\tau \sin t \cos t - \sin\tau \sin^2 t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos\tau}{2}\sin 2t - \frac{\sin\tau}{2}(1-\cos 2t)\right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\cos\tau}{2}\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{2\pi} - \frac{\sin\tau}{2}\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi}\right\} = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\sin\tau}{2}\cdot 2\pi\right) = \boxed{-\frac{1}{2}\sin\tau} \end{aligned}$$

(裏面へ続く)

問 4-3

区間 $[0, 2\pi]$ で定義された二つの関数 $f(t) = \sin t$ と $g(t) = \cos t$ がある。自己相関関数 $R_{ff}(\tau)$ および $R_{gg}(\tau)$ を求めよ (規格化しなくてよい)。

$$
\begin{aligned}
R_{ff}(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin t \cdot \sin(t+\tau)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin t\,(\sin t\cos\tau + \cos t \sin\tau)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos\tau \sin^2 t + \sin\tau \sin t\cos t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos\tau}{2}(1-\cos 2t) + \frac{\sin\tau}{2}\sin 2t\right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\cos\tau}{2}\left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi} + \frac{\sin\tau}{2}\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{2\pi}\right\} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos\tau}{2}\cdot 2\pi\right) = \boxed{\frac{1}{2}\cos\tau}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{gg}(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos t \cdot \cos(t+\tau)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos t\,(\cos t\cos\tau - \sin t \sin\tau)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\cos\tau \cos^2 t - \sin\tau \sin t\cos t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos\tau}{2}(1+\cos 2t) + \frac{\sin\tau}{2}\sin 2t\right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\cos\tau}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi} + \frac{\sin\tau}{2}\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{2\pi}\right\} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos\tau}{2}\cdot 2\pi\right) = \boxed{\frac{1}{2}\cos\tau}
\end{aligned}
$$

三角関数の公式

$$
\begin{aligned}
\sin^2\theta + \cos^2\theta &= 1 \\
\sin(-\theta) &= -\sin\theta \\
\cos(-\theta) &= \cos\theta \\
\tan(-\theta) &= -\tan\theta \\
\sin(\theta+\pi) &= -\sin\theta \\
\cos(\theta+\pi) &= -\cos\theta \\
\tan(\theta+\pi) &= \tan\theta \\
\sin(\theta+\frac{\pi}{2}) &= \cos\theta \\
\cos(\theta+\frac{\pi}{2}) &= -\sin\theta \\
\tan(\theta+\frac{\pi}{2}) &= -\cot\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha\pm\beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha\pm\beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\tan(\alpha\pm\beta) &= \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \\
\sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta \\
\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta \\
\tan 2\theta &= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \\
\sin\frac{\theta}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \\
\cos\frac{\theta}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \\
\tan\frac{\theta}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}
\end{aligned}
$$

ディジタル信号処理：本講義に必要な最低限の数学知識・数学公式

各種の用語

三角関数

$\angle\mathrm{ABC} = \pi/2$ の直角三角形 ABC の底辺の長さ $\overline{\mathrm{AB}} = a$、高さ $\overline{\mathrm{BC}} = b$、斜辺の長さ $\overline{\mathrm{CA}} = c$ とし、$\angle\mathrm{CAB} = \theta$ と定めたとき、6 つの三角関数が以下のように定義できる。

$$
\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{b}{c} && \text{正弦 (サイン)} \\
\cos\theta &= \frac{a}{c} && \text{余弦 (コサイン)} \\
\tan\theta &= \frac{b}{a} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} && \text{正接 (タンジェント)}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\mathrm{cosec}\theta &= \frac{c}{b} = \frac{1}{\sin\theta} && \text{余割 (コセカント)} \\
\sec\theta &= \frac{c}{a} = \frac{1}{\cos\theta} && \text{正割 (セカント)} \\
\cot\theta &= \frac{a}{b} = \frac{1}{\tan\theta} && \text{余接 (コタンジェント)}
\end{aligned}
$$

これらの三角関数には、以下のような性質がある。

$$
\begin{aligned}
\sin^2\theta + \cos^2\theta &= 1 \\
\sin(-\theta) &= -\sin\theta \\
\cos(-\theta) &= \cos\theta \\
\tan(-\theta) &= -\tan\theta \\
\sin(\theta+\pi) &= -\sin\theta \\
\cos(\theta+\pi) &= -\cos\theta \\
\tan(\theta+\pi) &= \tan\theta \\
\sin(\theta+\frac{\pi}{2}) &= \cos\theta \\
\cos(\theta+\frac{\pi}{2}) &= -\sin\theta \\
\tan(\theta+\frac{\pi}{2}) &= -\cot\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha\pm\beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha\pm\beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\tan(\alpha\pm\beta) &= \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \\
\sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta \\
\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta \\
\tan 2\theta &= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \\
\sin\frac{\theta}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \\
\cos\frac{\theta}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \\
\tan\frac{\theta}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}
\end{aligned}
$$

指数関数、対数関数

- **指数関数：**一般に $y = \alpha^x$ のとき y は x の指数関数と呼ぶ。物理や数学では $\alpha = 2.71828\cdots = e$ (ネイピア数、自然対数の底) を用いた関数に限定していることが多い。e^x は $\exp(x)$ と表現することもある。指数関数の値は常に正である。
- **対数関数：**指数関数の逆関数で $\log_\alpha x$ と表現する (α は対数の底という)。α を省略した場合、物理や数学では $\alpha = e$ の関数 (自然対数という) を指すことが多いが、$\alpha = 10$ を用いた常用対数と区別するために、$\ln x$ と書くことが多い。対数関数は $x > 0$ の範囲でのみ定義される。

指数・対数関数には以下のような性質がある。

$$
\begin{aligned}
e^0 &= 1 \\
e^{-\infty} &= 0 \\
e^{\infty} &= \infty \\
e^{-x} &= \frac{1}{e^x} \\
e^{x+y} &= e^x e^y \\
e^{x-y} &= \frac{e^x}{e^y} \\
e^{xy} &= (e^x)^y \\
e^{\ln x} &= x \\
\ln e^x &= x
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\ln 0 &= -\infty \\
\ln 1 &= 0 \\
\ln \infty &= \infty \\
\ln \frac{1}{x} &= -\ln x \\
\ln xy &= \ln x + \ln y \\
\ln \frac{x}{y} &= \ln x - \ln y \\
\log_a x &= \frac{\log_b a}{\log_b x} \quad \text{(底の変換)}
\end{aligned}
$$

ベクトル

- ベクトルは方向と大きさ (長さ) を持った値であり、$\vec{a}$ 或は $\boldsymbol{a}$(太字) で表す (大学以降の数学では太字を用いることの方が多い)。大きさのみを持つ値はスカラーと呼ぶ。
- ベクトルには次元があり、平面内のものは 2 次元、空間内のものは 3 次元である (1 次元はスカラーと同じ)。数学的には 4 次元以上にも拡張可能であり、任意の n 次元 (n は正の整数) ベクトルを仮定することができる。
- ベクトルは、その成分 (スカラー) を用いて、$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と書くことができる (例は 3 次元ベクトル)。
- ベクトルは、次数分の単位ベクトル (長さ 1 のベクトル) を用いて、$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ と書くことができる。単位ベクトルは、直交座標系では $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ の記号を用いることが多く、極座標系では $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$ といった記号を用いることが多い。
- ベクトルの長さは、各成分を用いて $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ と書ける。ベクトルの長さはスカラーである。
- ベクトルの和は、各成分の和である。$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
- ベクトルの差は、各成分の差である。$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$
- スカラーとベクトルの積は、各成分にスカラーをかけたものである。$\beta\boldsymbol{a} = (\beta a_1, \beta a_2, \beta a_3)$
- ベクトル同士の積は 2 種類あり、一つは内積 (演算子「$\cdot$」)、他方は外積 (演算子「$\times$」) という。
- ベクトルの内積は、$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ で定義されるスカラーである (内積のことをスカラー積ともいう)。
- ベクトルの内積は、それぞれの長さを用いて、$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos\theta$ と書くこともでき (θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角)、これは互いに平行な成分のかけ算を意味する。従って、互いに直交するベクトルの内積は 0 となる。

微分

- 関数 $f(x)$ の x に対する微分 $\dfrac{df(x)}{dx}$ は、x を微少量 dx だけ増やしたときの $f(x)$ の増加量であり、関数 $f(x)$ の x 方向の傾きを与える。
- 関数の微分は、関数が滑らかに連続している場合にのみ定義できる。例えば、V 字型をしている場合には、V 字の頂点では微分を定義できない。
- 関数が $x = x_1$ で極大値、あるいは極小値をとるとき、$\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_1} = 0$ である。
- 多変量からなる関数 (例えば、x、y の関数 $f(x, y)$) で、一つの変数のみに着目 (他の変数は定数と看做す) して微分したもの $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ を偏微分といい、着目した方向への傾きを表す。

主要な関数の微分公式を下に示す。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}a &= 0 \\
\frac{d}{dx}x^a &= a\,x^{a-1} \\
\frac{d}{dx}e^x &= e^x \\
\frac{d}{dx}\ln x &= \frac{1}{x} \\
\frac{d}{dx}\sin x &= \cos x \\
\frac{d}{dx}\cos x &= -\sin x \\
\frac{d}{dx}\tan x &= \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\{a\,f(x)\} &= a \cdot f'(x) \\
\frac{d}{dx}\{f(x) \pm g(x)\} &= f'(x) \pm g'(x) \\
\frac{d}{dx}\{f(x)\,g(x)\} &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\
\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\{g(x)\}^2} \\
\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{f(x)}\right\} &= -\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2} \\
\frac{d}{dx}f\left(g(x)\right) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\
\frac{d}{dx}f\left(ax + b\right) &= a \cdot f'(ax + b)
\end{aligned}
$$

積分

- 関数 $f(x)$ の x に対する定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は、$x = a$ から $x = b$ の範囲で $f(x)$ の値を足し合わせたものであり、a から b の間の面積を求める計算に相当する。
- 範囲を指定しない不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ は、任意の定数 (一般的には C で表現される) を含む関数である。

主要な関数の積分公式を下に示す。

$$
\begin{aligned}
\int 0\;dx &= C \\
\int x^a dx &= \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C \\
\int x^{-1} dx &= \ln|x| + C \\
\int e^x\;dx &= e^x + C \\
\int \sin x\;dx &= -\cos x + C \\
\int \cos x\;dx &= \sin x + C \\
\int \frac{1}{\cos^2 x}\;dx &= \tan x + C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int a\,f(x)\,dx &= a\,F(x) + C \\
\int \{f(x) \pm g(x)\}\;dx &= F(x) \pm G(x) + C \\
\int f(x) \cdot g'(x)\,dx &= f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,dx \\
\int e^x \cdot f(x)\,dx &= e^x \cdot f(x) - \int e^x \cdot f'(x)\,dx \\
\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx &= F(g(x)) + C \\
\int f(ax + b)\,dx &= \frac{1}{a}F(ax + b) + C
\end{aligned}
$$