ディジタル信号処理：後半の重要ポイント

1　実フーリエ級数展開

- **実フーリエ級数展開：** 角周波数 ω_0 (周期 $T = 2\pi/\omega_0$) をもつ任意の周期関数 $f(t)$ を、三角級数 ($\cos(k\omega_0 t)$、$\sin(k\omega_0 t)$ (k は正の整数) の線形結合) の形に展開すること。具体的には、$f(t)$ を
$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\ \cos(k\omega_0 t) + b_k\ \sin(k\omega_0 t)\}}$$
の形で展開することをいい、このときの係数 (実フーリエ係数) a_k、b_k は、
$$\boxed{a_k = \frac{\omega_0}{\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\ \cos(k\omega_0 t)\,dt \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)}$$
$$\boxed{b_k = \frac{\omega_0}{\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\ \sin(k\omega_0 t)\,dt \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)}$$
となる (a_k と b_k で k の範囲が異なることに注意)。一般に、フーリエ係数を求めて周期関数の持つ周波数に関する情報を調べることを、スペクトル解析あるいはフーリエ解析という。

- 実フーリエ級数展開の第 1 項の $a_0/2$ は時間に依存しない直流成分 であり、その大きさは、$\cos(0) = 1$ を考慮して、
$\boxed{\frac{a_0}{2} = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\,dt}$ である。式からわかるように、直流成分は $f(t)$ の平均値である。

- 実フーリエ級数展開の第 2 項の $\sum$ の部分は交流成分 である。

- 交流成分のうち $k = 1$ ($a_1\cos(\omega_0 t) + b_1\sin(\omega_0 t)$) を 基本波、$k > 1$ ($a_k\cos(k\omega_0 t) + b_k\sin(k\omega_0 t)$) を 第 k 高調波 という。

- 第 k 高調波 (基本波も含む) の振幅 は $\boxed{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}$ である。

- $f(t)$ が 奇関数のとき $a_k = 0$、偶関数のとき $b_k = 0$。

2　複素数、複素関数の性質

- **虚数単位：** $j = \sqrt{-1}$ のこと。$j^2 = -1$、$1/j = -j$ が成り立つ。

- **複素数、複素関数：** 実数 α、β と虚数単位 j を用いて $\alpha + j\beta$ と書ける数値を複素数という ($\alpha = 0$ の場合は純虚数、$\beta = 0$ の場合は実数)。変数や値に複素数を取る関数を複素関数という。なお、変数や値が実数の場合には実関数という。

- **複素平面：** 横軸を実数軸、縦軸を虚数軸とした平面。任意の複素数は複素平面内の 1 点で表現できる (複素数 $z = \alpha + j\beta$ を、実数成分 $\Re[z] = \mathrm{Re}[z] = \alpha$ と虚数成分 $\Im[z] = \mathrm{Im}[z] = \beta$ をもつ二次元ベクトルとして扱う)。

- **複素数の絶対値：** 複素数 $z = \alpha + j\beta$ の複素平面内での長さ、$\boxed{|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$。複素数の絶対値は実数。

- **複素数の偏角：** 複素数 $z = \alpha + j\beta$ の複素平面内での実軸からの角度、$\boxed{\angle z = \tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha}}$。複素数の偏角は実数。

- **複素共役：** 二つの複素数 $\alpha + j\beta$ と $\alpha - j\beta$ のように、複素平面上で、実軸に対して線対称の関係にある複素数は互いに複素共役である、といい、z の複素共役を $\bar{z}$ と書く。複素共役の定義から、$|z| = |\bar{z}|$、$\angle z = -\angle\bar{z}$ が成り立つ。

- **複素数に関するオイラーの公式：** $\boxed{e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta}$。$e^{j\theta}$ は複素平面内で絶対値 1、偏角 θ の点を表す。また、任意の複素数は $\boxed{z = |z|\,e^{j\theta}}$ と書ける。$e^{j\theta}$ と $e^{-j\theta}$ は互いに複素共役である。

- オイラーの公式から、$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}}$、$\boxed{\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}}$、$\boxed{e^0 = 1}$、$\boxed{e^{\pm jk\pi} = 1\ (k\text{:偶数})\ /\ -1\ (k\text{:奇数})}$

- **複素関数同士の内積：** 二つの複素関数 $f(t)$ と $g(t)$ があるとき、その内積 (範囲 $[a, b]$) は、$\boxed{< f(t), g(t) >= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\,dt}$

3 複素フーリエ級数展開

- **複素フーリエ級数展開：**角周波数 ω_0 (周期 $T = 2\pi/\omega_0$) をもつ任意の周期関数 $f(t)$ (ただし、$f(t)$ は実関数) を、複素関数 $e^{jk\omega_0 t}$ (k は整数) の線形結合に展開すること。具体的には、$f(t)$ を

$$\boxed{f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k\, e^{jk\omega_0 t}}$$

  の形で展開することをいい、このときの係数 (複素フーリエ係数) C_k は、

$$\boxed{C_k = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)}$$

  となる (C_k の式で、$f(t)$ に掛けているのは $e^{jk\omega_0 t}$ ではなく、複素共役の $e^{-jk\omega_0 t}$ であることに注意)。

- 複素フーリエ級数展開で用いる複素関数 $e^{jk\omega_0 t}$ は、複素平面上では角周波数 $k\omega_0$ で回転している点に対応しており、これも三角関数と同様に周期関数である。

- $k \neq 0$ のとき C_k と C_{-k} は互いに複素共役で、$\boxed{|C_k| = |C_{-k}|}$、$\boxed{\angle C_k = -\angle C_{-k}}$ の関係がある。

- 複素フーリエ級数展開で直流に対応するのは $k = 0$ の項であり、直流成分は、$e^0 = 1$ を考慮して、

  $\boxed{C_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\, dt}$ である。式からわかるように C_0 は $f(t)$ の平均値で、常に実数。

- 第 k 高調波の振幅は、$C_k\, e^{jk\omega_0 t} + C_{-k}\, e^{-jk\omega_0 t}$ の振幅であり、C_k と C_{-k} が複素共役であることを用いると、$\boxed{2|C_k|}$ となる。

- $f(t)$ が奇関数のとき C_k は純虚数、偶関数のとき C_k は実数。

- **振幅スペクトル：**$|C_k|$ の k 依存性、$k = 0$ で線対称 (左右対称)、信号を時間方向にずらしても変化しない

- **位相スペクトル：**$\angle C_k$ の k 依存性、$k = 0$ で点対称、信号を振幅方向に拡大・縮小しても変化しない

- **パワースペクトル：**$|C_k|^2$ の k 依存性、$k = 0$ で線対称 (左右対称)、第 k 高調波が担っているエネルギーに比例

- 上の 3 つのスペクトルの横軸 (k 軸) は、$\boxed{\dfrac{\omega_0}{2\pi}k}$ [Hz] の周波数に対応する。

- 二つの周期関数 $f(t)$、$g(t)$ の複素フーリエ係数をそれぞれ C_k、D_k としたとき、両関数の線形和 $\alpha f(t) + \beta g(t)$ の複素フーリエ係数は $\boxed{\alpha C_k + \beta D_k}$ である。

- **フーリエ級数展開による関数の近似：**$k = N$ までの項を用いて元の関数を近似できる。このとき、N が大きいほど誤差は少なくなる。ただし、元の関数が不連続点を持つ場合には、不連続点付近での誤差を完全に 0 にすることはできない (ギブス現象)。現在音楽データや画像の圧縮に使われているアルゴリズムの基本原理は、このフーリエ級数展開の有限項近似を用いたものである。

4 定期試験に関して

- 期末試験の範囲は教科書の第 5 章「フーリエ級数展開」である。ただし、第 1 章から第 4 章までの知識も問題解答に必要となることがあるので、前半部分の復習もしておくこと。
- 本プリントの内容を理解するとともに、後半に行った演習問題の復習をしておくこと。
- 数式は、形ではなく、その意味を正しく理解して覚えること (記号や数値は問題に応じて変わることがある)。特に、枠で囲まれた数式は正確に覚えること。
- 期末試験では数値計算をする問題は出さない。従って、関数電卓も含めて、一切の持ち込みは認めない。
- 本資料および演習問題の解答例を以下からダウンロードできるので、適宜参考とすること。

`http://www.surf.nuqe.nagoya-u.ac.jp/members/nakahara/DSP_summary2.pdf`

ディジタル信号処理 演習 5

学籍番号： 学籍番号　　氏名： 氏名　　評価： A/B/C

問 5-1

角周波数 ω_0 の周期関数 $f(t)$ がある。$f(t)$ を $\cos(k\omega_0 t)$ と $\sin(k\omega_0 t)$ で実フーリエ級数展開したときの式と、フーリエ係数 (a_k、b_k) の式を書け (k の範囲も記載すること)。

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)\}$$

$$a_k = \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t) \cos(k\omega_0 t)\, dt \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, \infty)$$

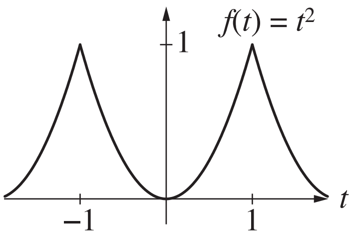
$$b_k = \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t) \sin(k\omega_0 t)\, dt \quad (k = 1, 2, \cdots, \infty)$$

問 5-2

$f(t) = t^2$ が区間 $[-1, 1]$ の周期関数であるとして、この関数の直流成分を求めよ。

直流成分は実フーリエ級数展開の $a_0/2$ の項である。また、角周波数 $\omega_0 = \pi$ を考慮すると、

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^2\, dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{3}}$$



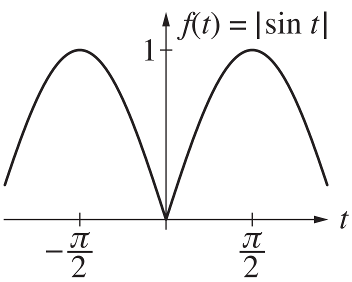
問 5-3

$f(t) = |\sin t|$ が区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ の周期関数であるとして、この関数の基本波の振幅を求めよ。

$|\sin t|$ は偶関数であるので実フーリエ係数 $b_k = 0$。従って基本波の振幅は $|a_1|$ である。角周波数 $\omega_0 = 2$ であるので、

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sin t| \cos(2t)\, dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi/2}^{0} -\{\sin(3t) + \sin(-t)\}\, dt + \int_{0}^{\pi/2} \{\sin(3t) + \sin(-t)\}\, dt\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{\cos(3t)}{3}\right]_{-\pi/2}^{0} - [\cos t]_{-\pi/2}^{0} - \left[\frac{\cos(3t)}{3}\right]_{0}^{\pi/2} + [\cos t]_{0}^{\pi/2}\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} - 1\right\} = -\frac{4}{3\pi}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\therefore \text{基本波の振幅} |a_1| = \frac{4}{3\pi}}$$



ヒント：$\sin\theta \cos\phi = \dfrac{\sin(\theta+\phi) + \sin(\theta-\phi)}{2}$、$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

ディジタル信号処理 演習 6

学籍番号： 学籍番号　　氏名： 氏名　　評価： A/B/C

問 6-1

$z_1 = 3 + 2j$、$z_2 = 1 - 2j$、$z_3 = \alpha e^{j\theta}$、$z_4 = \beta e^{j\phi}$ $(\alpha, \beta > 0)$ として、以下の複素数の計算をせよ。

(1) $z_1 - z_2 = (3-1) + (2+2)j = \boxed{2 + 4j}$

(2) $z_1 \cdot z_2 = (3+2j)(1-2j) = 3 - 6j + 2j + 4 = \boxed{7 - 4j}$

(3) $\Re[z_1] = \Re[3+2j] = \boxed{3}$ (実部)

(4) $\Im[z_1] = \Im[3+2j] = \boxed{2}$ (虚部)

(5) $|z_1| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \boxed{\sqrt{13}}$ (絶対値)

(6) $\tan(\angle z_1) = \dfrac{\mathrm{Im}[3+2j]}{\mathrm{Re}[3+2j]} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$ (偏角)

(7) $\overline{z_1} = \overline{3+2j} = \boxed{3 - 2j}$ (複素共役)

(8) $z_3 \cdot z_4 = \alpha e^{j\theta} \cdot \beta e^{j\phi} = \boxed{\alpha\beta e^{j(\theta+\phi)}}$

(9) $\dfrac{z_3}{z_4} = \dfrac{\alpha e^{j\theta}}{\beta e^{j\phi}} = \boxed{\dfrac{\alpha}{\beta} e^{j(\theta-\phi)}}$

(10) $|z_3| = |\alpha e^{j\theta}| = \boxed{\alpha}$ (絶対値)

(11) $\angle z_3 = \angle(\alpha e^{j\theta}) = \boxed{\theta}$ (偏角)

(12) $\overline{z_3} = \overline{\alpha e^{j\theta}} = \boxed{\alpha e^{-j\theta}}$ (複素共役)

(13) $z_3 =$(三角関数を用いて) $\boxed{\alpha(\cos\theta + j\sin\theta)}$ (オイラーの公式)

(14) $\cos(\angle z_3) =$(指数関数を用いて) $\cos\theta = \boxed{\dfrac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}}$ (オイラーの公式)

(15) $\sin(\angle z_3) =$(指数関数を用いて) $\sin\theta = \boxed{\dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}}$ (オイラーの公式)

(裏面へ続く)

問 6-2

(1) 区間 $[-1,1]$ で定義された複素関数 $f(t) = (3+2j)t$ のノルムを求めよ。

$$\|f(t)\| = \sqrt{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(3+2j)t\cdot(3-2j)t\,dt} = \sqrt{\frac{13}{2}\int_{-1}^{1}t^2\,dt} = \sqrt{\frac{13}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1}} = \boxed{\sqrt{\frac{13}{3}}}$$

(2) 区間 $[-\pi,\pi]$ で定義された二つの複素関数 $f(t) = e^{jmt}$ と $g(t) = e^{jnt}$ の内積を求めよ。ただし、m、n は整数とする。

$$< f(t), g(t) > = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{jmt}\cdot e^{-jnt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(m-n)t}\,dt$$

ここで、$m = n$ のとき、

$$< f(t), g(t) > = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{0}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dt = \frac{1}{2\pi}\Big[\,t\,\Big]_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}(2\pi) = \boxed{1\ (m = n\text{ のとき})}$$

$m \neq n$ のとき、

$$< f(t), g(t) > = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(m-n)t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j(m-n)t}}{j(m-n)}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2j(m-n)\pi}\left(e^{j(m-n)\pi} - e^{-j(m-n)\pi}\right)$$

ここで、オイラーの公式 $e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j\sin\theta$ を用いると、

$$< f(t), g(t) > = \frac{1}{2j(m-n)\pi}\cdot 2j\sin\{(m-n)\pi\} = \frac{1}{(m-n)\pi}\sin\{(m-n)\pi\}$$

$$= \boxed{0\ (m \neq n\text{ のとき})}$$

ディジタル信号処理 演習 7

学籍番号： 学籍番号　　氏名： 氏名　　評価： A/B/C

問 7-1

角周波数 ω_0 の周期関数 $f(t)$ を複素フーリエ級数展開したときの式と、フーリエ係数 C_k の式を書け (k の範囲も記載すること)。

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k\, e^{jk\omega_0 t}$$

$$C_k = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm\infty)$$

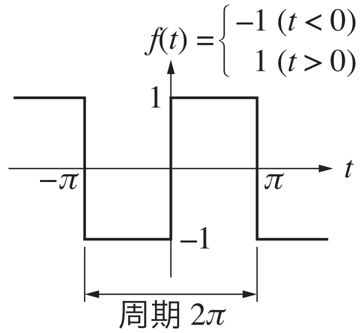
問 7-2

- 奇関数の複素フーリエ係数は 純虚数 であり、偶関数の複素フーリエ係数は 実数 である。
- 複素フーリエ係数 C_k と C_{-k} との間には、 複素共役 の関係があり、$|C_k|$ = $|C_{-k}|$ 、$\angle C_k$ = $-\angle C_{-k}$ である。
- 角周波数 ω_0 の周期関数を $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|\, e^{j(k\omega_0 t + \varphi_k)}$ の形で複素フーリエ級数展開したとき、$|C_k|$ の k 依存性のグラフを 振幅 スペクトル、φ_k の k 依存性のグラフを 位相 スペクトル、$|C_k|^2$ の k 依存性のグラフを パワー スペクトルという。また、これらのスペクトルの横軸 k は $k\dfrac{\omega_0}{2\pi}$ [Hz] の周波数に対応する。$|C_k|$ のグラフは $k = 0$ に対して 左右 対称、φ_k のグラフは $k = 0$ に対して 点 対称、$|C_k|^2$ のグラフは $k = 0$ に対して 左右 対称である。
- 信号の振幅を拡大・縮小すると、 位相 スペクトルは変化せずに、 振幅 スペクトルだけが拡大・縮小する。また、信号を時間方向に移動させる (時間の原点をずらす) と、 振幅 スペクトルは変化せずに、 位相 スペクトルだけが変化する。
- $f(t)$ の複素フーリエ係数を C_k、g(t) の複素フーリエ係数を D_k としたとき、$\alpha f(t) + \beta g(t)$ の複素フーリエ係数は $\alpha C_k + \beta D_k$ となる。

(裏面へ続く)

問 7-3

図に示した矩形波の複素フーリエ係数を求めよ。（ヒント：$t<0$ と $t>0$ の領域に分けて計算）また、振幅スペクトルと位相スペクトルをグラフに描け。



図から、周期は 2π すなわち、角周波数 $\omega_0=1$ である。$k\neq 0$ のとき、

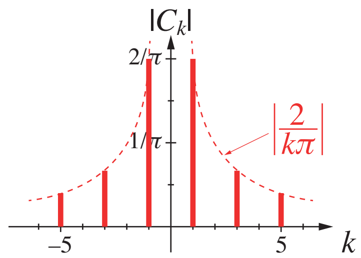
$$
\begin{aligned}
C_k &= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} -e^{-jkt}\,dt + \int_{0}^{\pi} e^{-jkt}\,dt\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\left[\frac{-e^{-jkt}}{-jk}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{e^{-jkt}}{-jk}\right]_{0}^{\pi}\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi jk}\left\{\left(1-e^{jk\pi}\right)-\left(e^{-jk\pi}-1\right)\right\} \\
&= \frac{1}{j\pi k}\left\{1-\frac{e^{jk\pi}+e^{-jk\pi}}{2}\right\} \\
&= -\frac{j}{k\pi}\{1-\cos(k\pi)\} = -\frac{2j}{k\pi}\sin^2\left(\frac{k\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

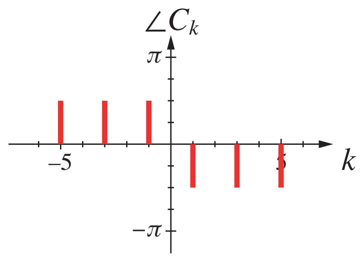
また、$k=0$ のとき、

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} -1\,dt + \int_{0}^{\pi} 1\,dt\right\} = \frac{1}{2\pi}\left\{[-t]_{-\pi}^{0} + [t]_{0}^{\pi}\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}(0-\pi+\pi-0) = 0
\end{aligned}
$$

従って、図の矩形波の複素フーリエ係数は、

$$
\begin{cases}
C_0 = 0 \\
C_k = -\dfrac{2j}{k\pi}\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2}\right) \quad (k\neq 0)
\end{cases}
$$





$k\neq 0$ で C_k は純虚数であるので、振幅は、

$$
|C_k| = \left|\frac{2}{k\pi}\right|\sin^2\left(\frac{k\pi}{2}\right)
$$

ここで、$\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2}\right)$ は、k が奇数のとき 1、偶数のとき 0 であるので、振幅スペクトルは右中図のようになる。

一方 C_k の偏角は、$\dfrac{C_k}{j}$ が正のとき $\dfrac{\pi}{2}$、負のとき $-\dfrac{\pi}{2}$ であるので、位相スペクトルは右下図のようになる ($C_k=0$ のときの偏角は 0)。

ディジタル信号処理：本講義に必要な最低限の数学知識・数学公式

各種の用語

三角関数

$\angle \mathrm{ABC} = \pi/2$ の直角三角形 ABC の底辺の長さ $\overline{\mathrm{AB}} = a$、高さ $\overline{\mathrm{BC}} = b$、斜辺の長さ $\overline{\mathrm{CA}} = c$ とし、$\angle \mathrm{CAB} = \theta$ と定めたとき、6 つの三角関数が以下のように定義できる。

$$
\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{b}{c} && \text{正弦 (サイン)} \\
\cos\theta &= \frac{a}{c} && \text{余弦 (コサイン)} \\
\tan\theta &= \frac{b}{a} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} && \text{正接 (タンジェント)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cosec}\theta &= \frac{c}{b} = \frac{1}{\sin\theta} && \text{余割 (コセカント)} \\
\sec\theta &= \frac{c}{a} = \frac{1}{\cos\theta} && \text{正割 (セカント)} \\
\cot\theta &= \frac{a}{b} = \frac{1}{\tan\theta} && \text{余接 (コタンジェント)}
\end{aligned}
$$

これらの三角関数には、以下のような性質がある。

$$
\begin{aligned}
\sin^2\theta + \cos^2\theta &= 1 \\
\sin(-\theta) &= -\sin\theta \\
\cos(-\theta) &= \cos\theta \\
\tan(-\theta) &= -\tan\theta \\
\sin(\theta+\pi) &= -\sin\theta \\
\cos(\theta+\pi) &= -\cos\theta \\
\tan(\theta+\pi) &= \tan\theta \\
\sin(\theta+\frac{\pi}{2}) &= \cos\theta \\
\cos(\theta+\frac{\pi}{2}) &= -\sin\theta \\
\tan(\theta+\frac{\pi}{2}) &= -\cot\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha\pm\beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha\pm\beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\tan(\alpha\pm\beta) &= \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \\
\sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta \\
\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta \\
\tan 2\theta &= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \\
\sin\frac{\theta}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \\
\cos\frac{\theta}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \\
\tan\frac{\theta}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}
\end{aligned}
$$

指数関数、対数関数

- **指数関数：**一般に $y = \alpha^x$ のとき y は x の指数関数と呼ぶ。物理や数学では $\alpha = 2.71828\cdots = e$ (ネイピア数、自然対数の底) を用いた関数に限定していることが多い。e^x は $\exp(x)$ と表現することもある。指数関数の値は常に正である。
- **対数関数：**指数関数の逆関数で $\log_\alpha x$ と表現する (α は対数の底という)。α を省略した場合、物理や数学では $\alpha = e$ の関数 (自然対数という) を指すことが多いが、$\alpha = 10$ を用いた常用対数と区別するために、$\ln x$ と書くことが多い。対数関数は $x > 0$ の範囲でのみ定義される。

指数・対数関数には以下のような性質がある。

$$\begin{aligned}
e^0 &= 1 \\
e^{-\infty} &= 0 \\
e^{\infty} &= \infty \\
e^{-x} &= \frac{1}{e^x} \\
e^{x+y} &= e^x e^y \\
e^{x-y} &= \frac{e^x}{e^y} \\
e^{xy} &= (e^x)^y \\
e^{\ln x} &= x \\
\ln e^x &= x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln 0 &= -\infty \\
\ln 1 &= 0 \\
\ln \infty &= \infty \\
\ln \frac{1}{x} &= -\ln x \\
\ln xy &= \ln x + \ln y \\
\ln \frac{x}{y} &= \ln x - \ln y \\
\log_a x &= \frac{\log_b a}{\log_b x} \quad \text{(底の変換)}
\end{aligned}$$

ベクトル

- ベクトルは方向と大きさ (長さ) を持った値であり、$\vec{a}$ 或は $\boldsymbol{a}$(太字) で表す (大学以降の数学では太字を用いることの方が多い)。大きさのみを持つ値はスカラーと呼ぶ。
- ベクトルには次元があり、平面内のものは 2 次元、空間内のものは 3 次元である (1 次元はスカラーと同じ)。数学的には 4 次元以上にも拡張可能であり、任意の n 次元 (n は正の整数) ベクトルを仮定することができる。
- ベクトルは、その成分 (スカラー) を用いて、$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と書くことができる (例は 3 次元ベクトル)。
- ベクトルは、次数分の単位ベクトル (長さ 1 のベクトル) を用いて、$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ と書くことができる。単位ベクトルは、直交座標系では $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ の記号を用いることが多く、極座標系では $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$ といった記号を用いることが多い。
- ベクトルの長さは、各成分を用いて $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ と書ける。ベクトルの長さはスカラーである。
- ベクトルの和は、各成分の和である。$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
- ベクトルの差は、各成分の差である。$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$
- スカラーとベクトルの積は、各成分にスカラーをかけたものである。$\beta\boldsymbol{a} = (\beta a_1, \beta a_2, \beta a_3)$
- ベクトル同士の積は 2 種類あり、一つは内積 (演算子「$\cdot$」)、他方は外積 (演算子「$\times$」) という。
- ベクトルの内積は、$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ で定義されるスカラーである (内積のことをスカラー積ともいう)。
- ベクトルの内積は、それぞれの長さを用いて、$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \cos\theta$ と書くこともでき (θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角)、これは互いに平行な成分のかけ算を意味する。従って、互いに直交するベクトルの内積は 0 となる。

微分

- 関数 $f(x)$ の x に対する微分 $\dfrac{df(x)}{dx}$ は、x を微少量 dx だけ増やしたときの $f(x)$ の増加量であり、関数 $f(x)$ の x 方向の傾きを与える。
- 関数の微分は、関数が滑らかに連続している場合にのみ定義できる。例えば、V 字型をしている場合には、V 字の頂点では微分を定義できない。
- 関数が $x = x_1$ で極大値、あるいは極小値をとるとき、$\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_1} = 0$ である。
- 多変量からなる関数 (例えば、x、y の関数 $f(x,y)$) で、一つの変数のみに着目 (他の変数は定数と看做す) して微分したもの $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ を偏微分といい、着目した方向への傾きを表す。

主要な関数の微分公式を下に示す。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}a &= 0 \\
\frac{d}{dx}x^a &= a\,x^{a-1} \\
\frac{d}{dx}e^x &= e^x \\
\frac{d}{dx}\ln x &= \frac{1}{x} \\
\frac{d}{dx}\sin x &= \cos x \\
\frac{d}{dx}\cos x &= -\sin x \\
\frac{d}{dx}\tan x &= \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\{a\,f(x)\} &= a \cdot f'(x) \\
\frac{d}{dx}\{f(x) \pm g(x)\} &= f'(x) \pm g'(x) \\
\frac{d}{dx}\{f(x)\,g(x)\} &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\
\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\{g(x)\}^2} \\
\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{f(x)}\right\} &= -\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2} \\
\frac{d}{dx}f\,(g(x)) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\
\frac{d}{dx}f\,(ax+b) &= a \cdot f'(ax+b)
\end{aligned}
$$

積分

- 関数 $f(x)$ の x に対する定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は、$x = a$ から $x = b$ の範囲で $f(x)$ の値を足し合わせたものであり、a から b の間の面積を求める計算に相当する。
- 範囲を指定しない不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ は、任意の定数 (一般的には C で表現される) を含む関数である。

主要な関数の積分公式を下に示す。

$$
\begin{aligned}
\int 0\,dx &= C \\
\int x^a dx &= \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C \\
\int x^{-1} dx &= \ln|x| + C \\
\int e^x\,dx &= e^x + C \\
\int \sin x\,dx &= -\cos x + C \\
\int \cos x\,dx &= \sin x + C \\
\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx &= \tan x + C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int a\,f(x)\,dx &= a\,F(x) + C \\
\int \{f(x) \pm g(x)\}\,dx &= F(x) \pm G(x) + C \\
\int f(x) \cdot g'(x)\,dx &= f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,dx \\
\int e^x \cdot f(x)\,dx &= e^x \cdot f(x) - \int e^x \cdot f'(x)\,dx \\
\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx &= F(g(x)) + C \\
\int f(ax+b)\,dx &= \frac{1}{a}F(ax+b) + C
\end{aligned}
$$