電気磁気学II

- 教科書：「電気磁気学」安達・大貫共著
- 授業内容
  - 第6章：真空中の静磁界

    アンペアの右ネジの法則、磁束密度に関するガウスの法則、
    ビオ・サバールの法則、アンペアの周回積分の法則、
    フレミングの左手の法則
  - 第8章：電磁誘導

    ファラデーの電磁誘導の法則、フレミングの右手の法則、
    渦電流と表皮効果
  - 第9章：インダクタンス

    自己インダクタンス、相互インダクタンス、
    磁界のエネルギー

本授業の内容の多くは、定性的には高校物理で学んだ内容である。

本授業ではこれらを数学の知識を活用して定量的に扱えるようにすることが目的である。

授業においては、最低限の数学的知識(ベクトル、微分・積分)を前提とするので、数学に自信がないものは、高校数学の復習をしておくこと。

成績評価は、演習課題、中間試験、期末試験で行う。

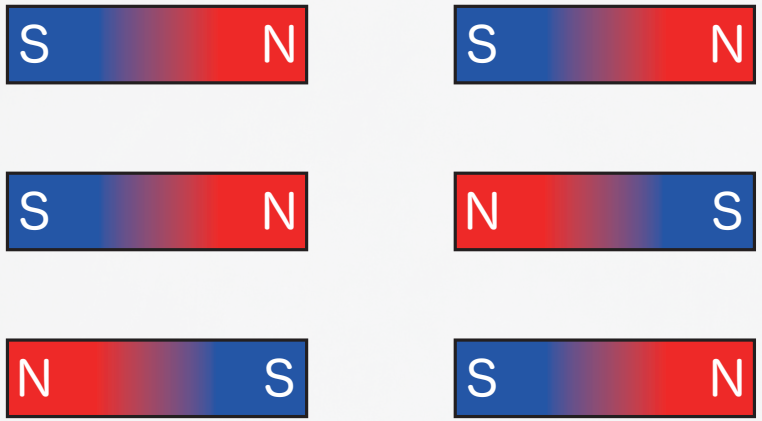
演習課題は演習プリントを授業中あるいは宿題として提出してもらう予定である(10回前後)。

理由なく欠席した場合には、減点対象とすることがあるので、欠席をした際は教務課発行の欠席届を提出すること。

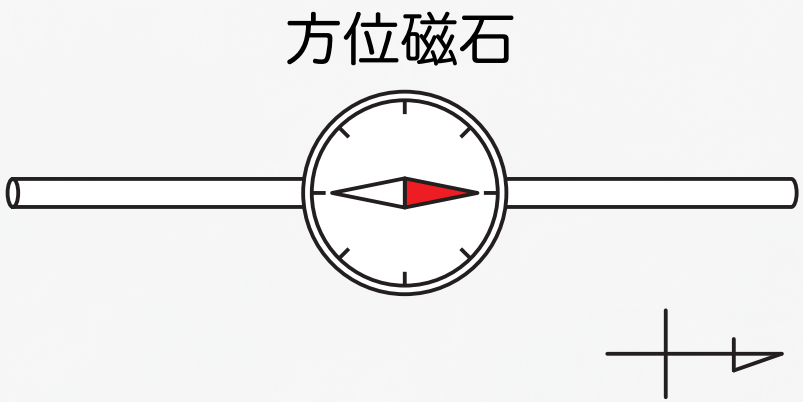
第6章：真空中の静磁界

磁気に関わる種々の現象

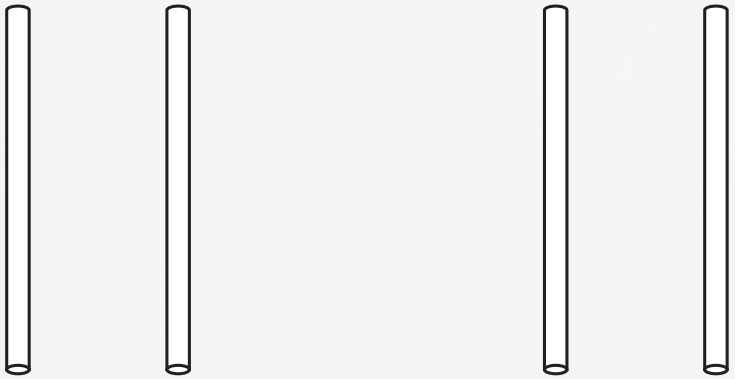
棒磁石に働く力



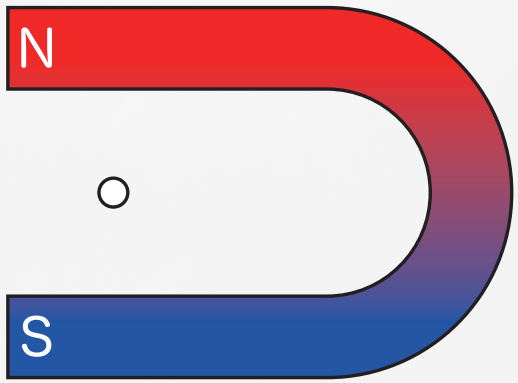
電流が磁石に与える力



電流間に働く力

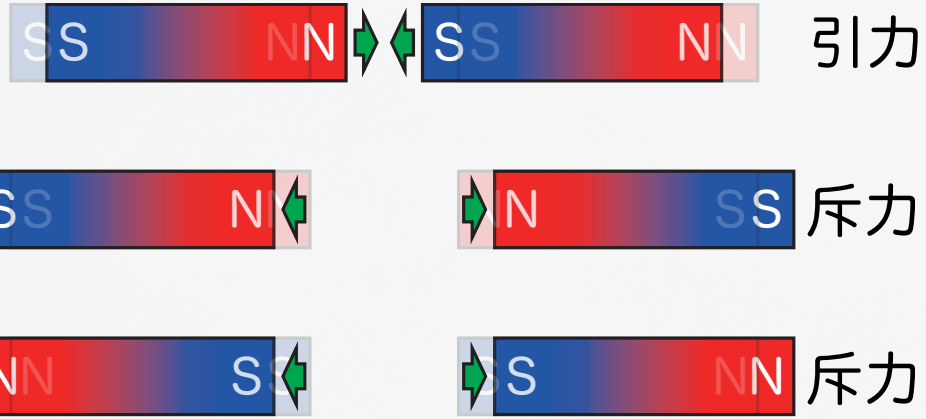


電流が磁石から受ける力

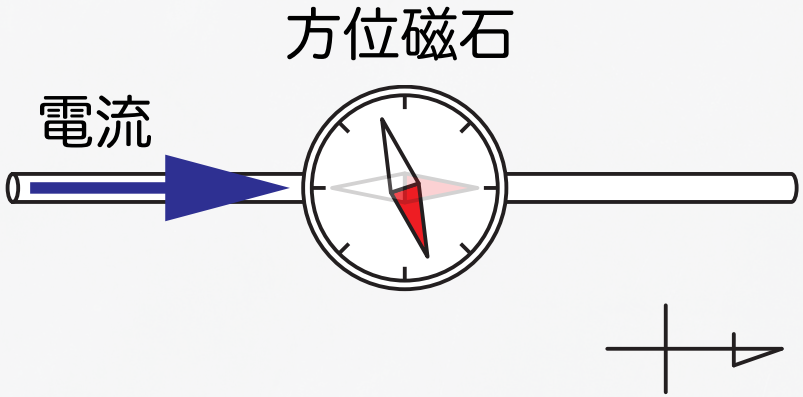


磁気に関わる種々の現象

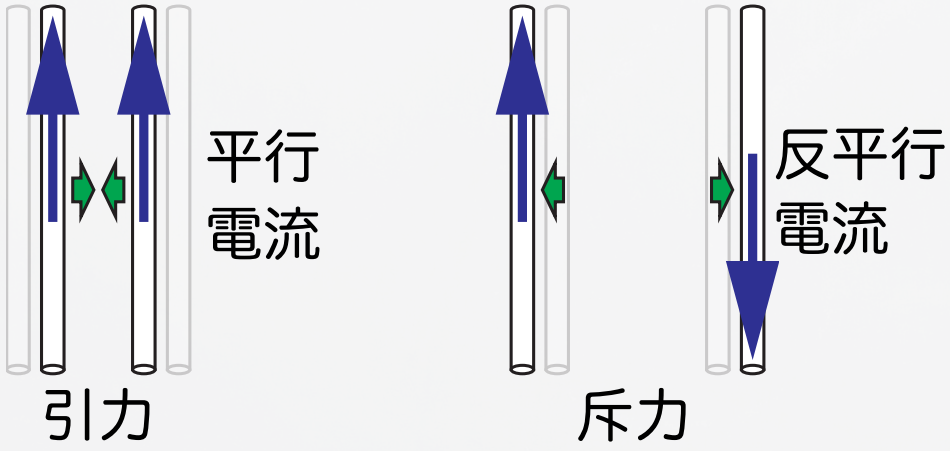
棒磁石に働く力



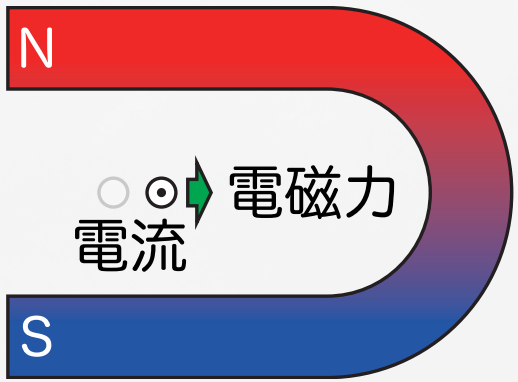
電流が磁石に与える力



電流間に働く力

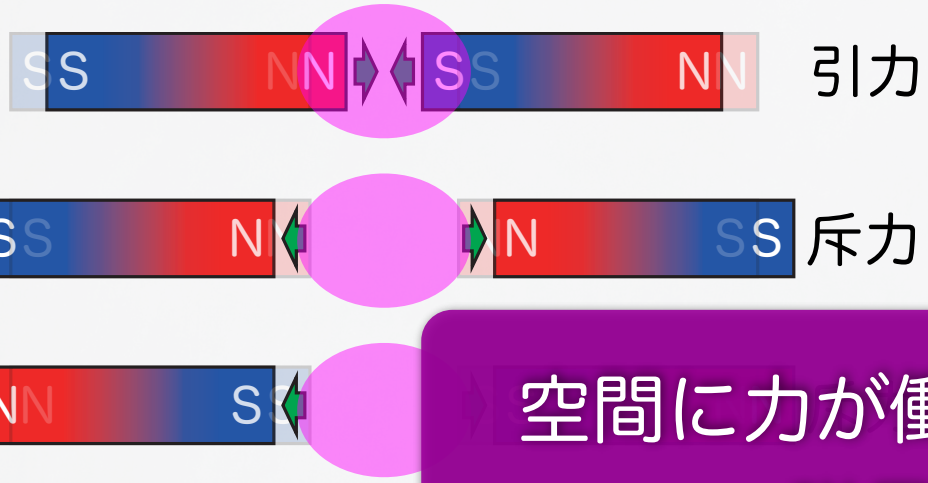


電流が磁石から受ける力

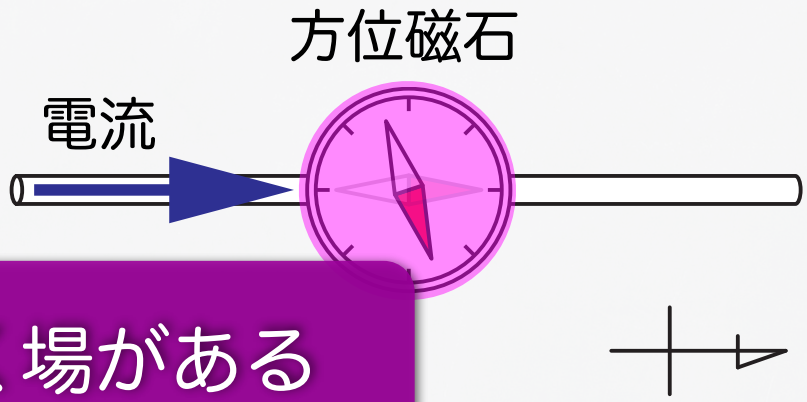


磁気に関わる種々の現象

棒磁石に働く力

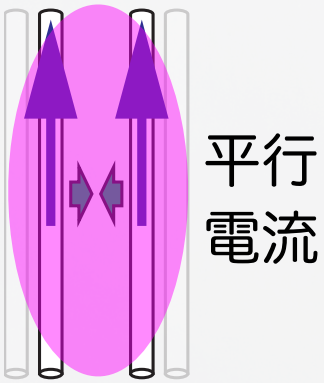


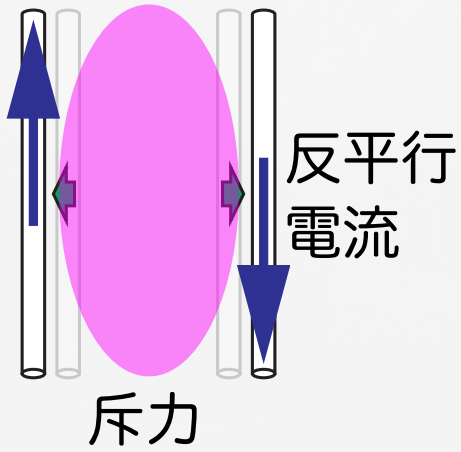
電流が磁石に与える力



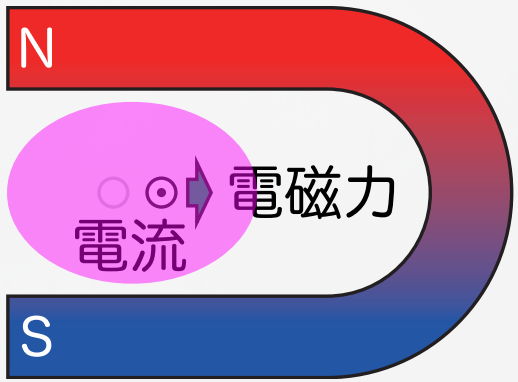
空間に力が働く場がある
→ 磁界 (磁場)

電流間に働く力



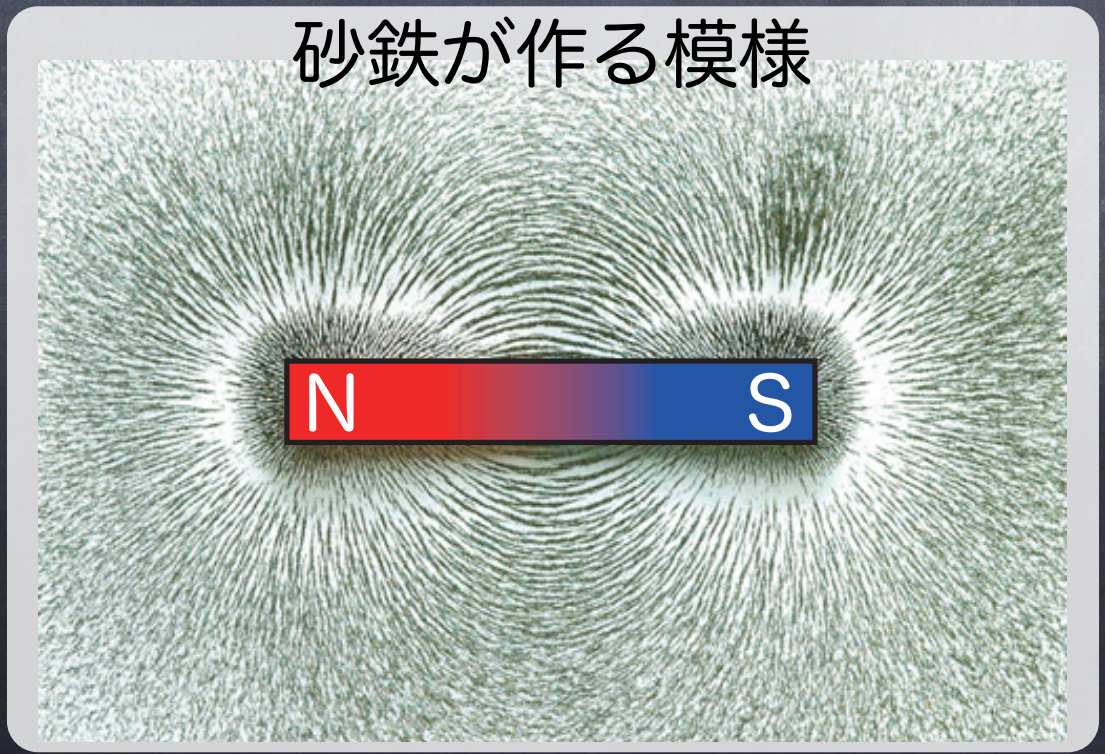


電流が磁石から受ける力



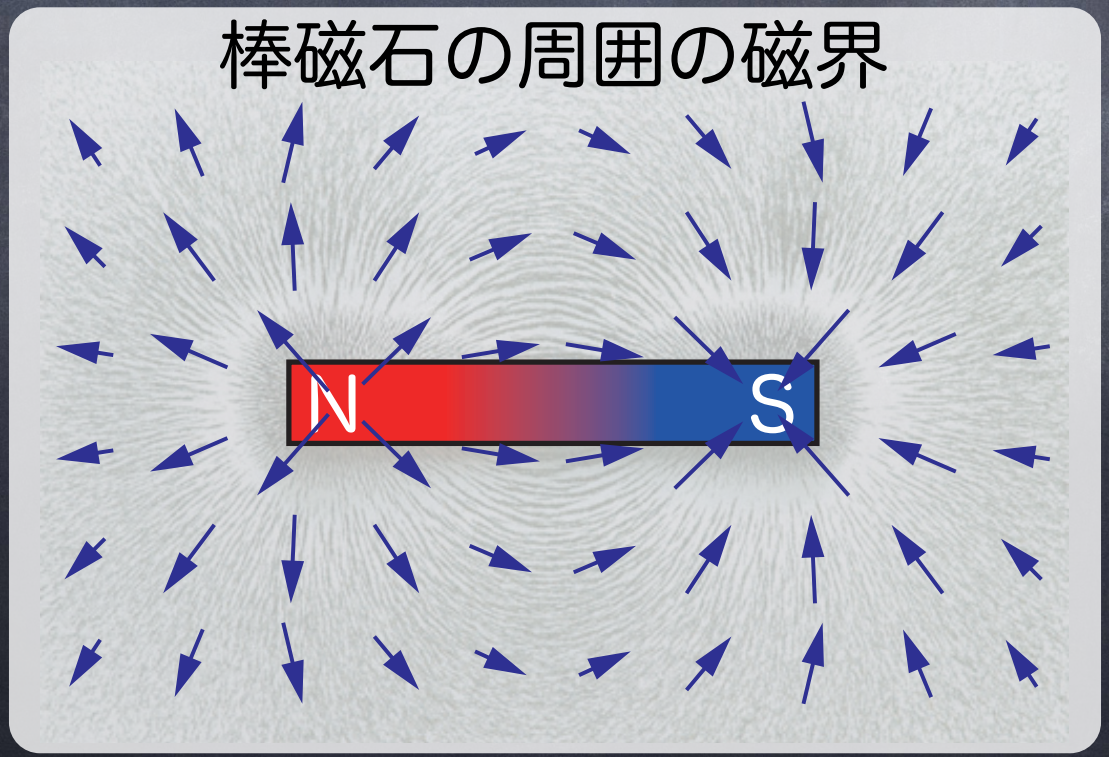
磁界と磁束の基礎

- **磁界** (磁場：magnetic field)
  →磁気的な作用が行われる力の場 (大きさと方向を持つベクトル場)
  全ての磁場の根源は電荷の動き (電流)



磁界と磁束の基礎

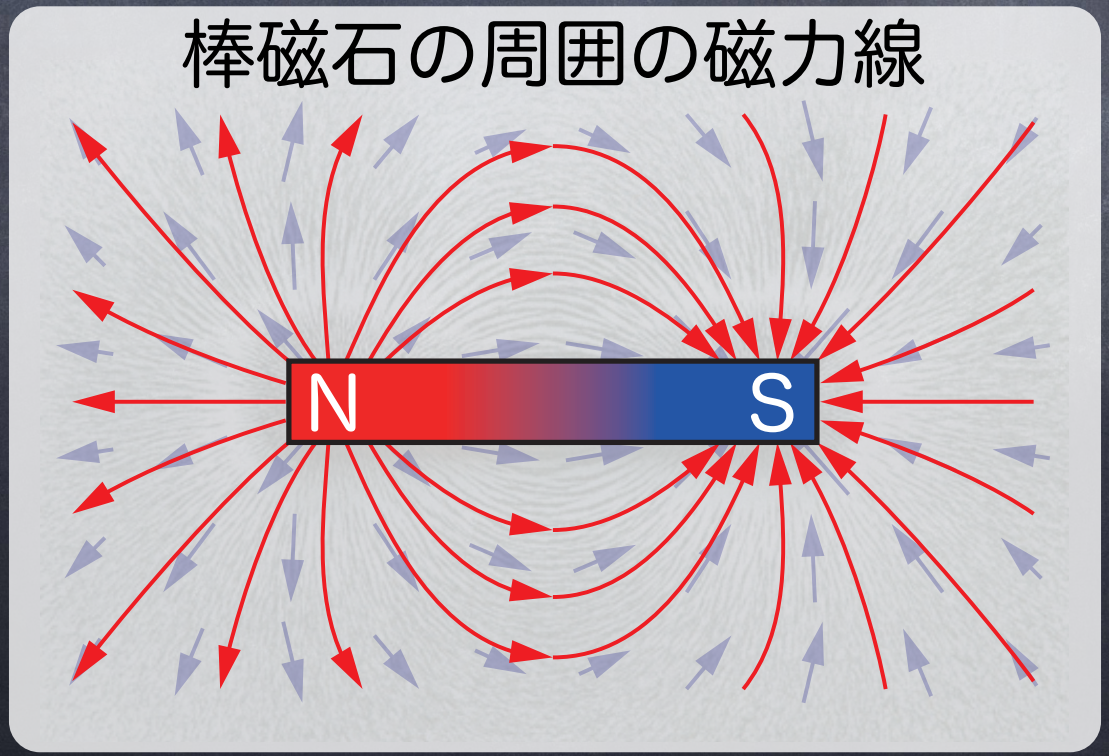
- **磁界** (磁場：magnetic field)
  →磁気的な作用が行われる力の場 (大きさと方向を持つベクトル場)
  全ての磁場の根源は電荷の動き (電流)



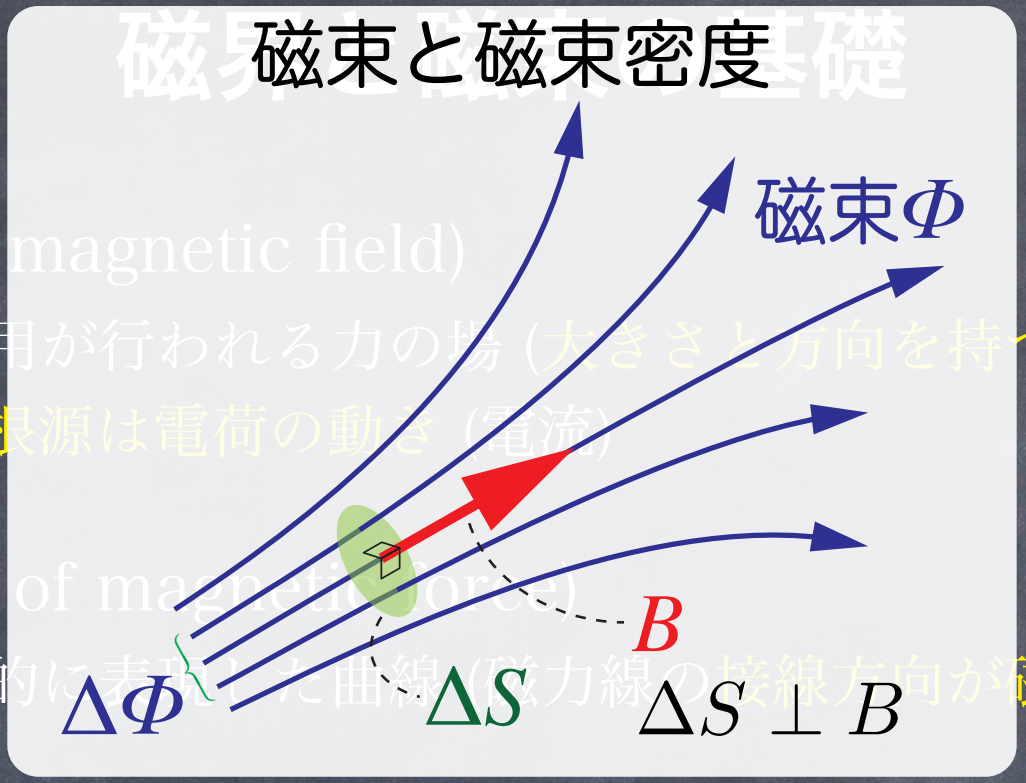
磁界と磁束の基礎

- **磁界** (磁場：magnetic field)
  →磁気的な作用が行われる力の場 (大きさと方向を持つベクトル場)
  全ての磁場の根源は電荷の動き (電流)

- **磁力線** (line of magnetic force)
  →磁界を視覚的に表現した曲線 (磁力線の接線方向が磁界の方向)

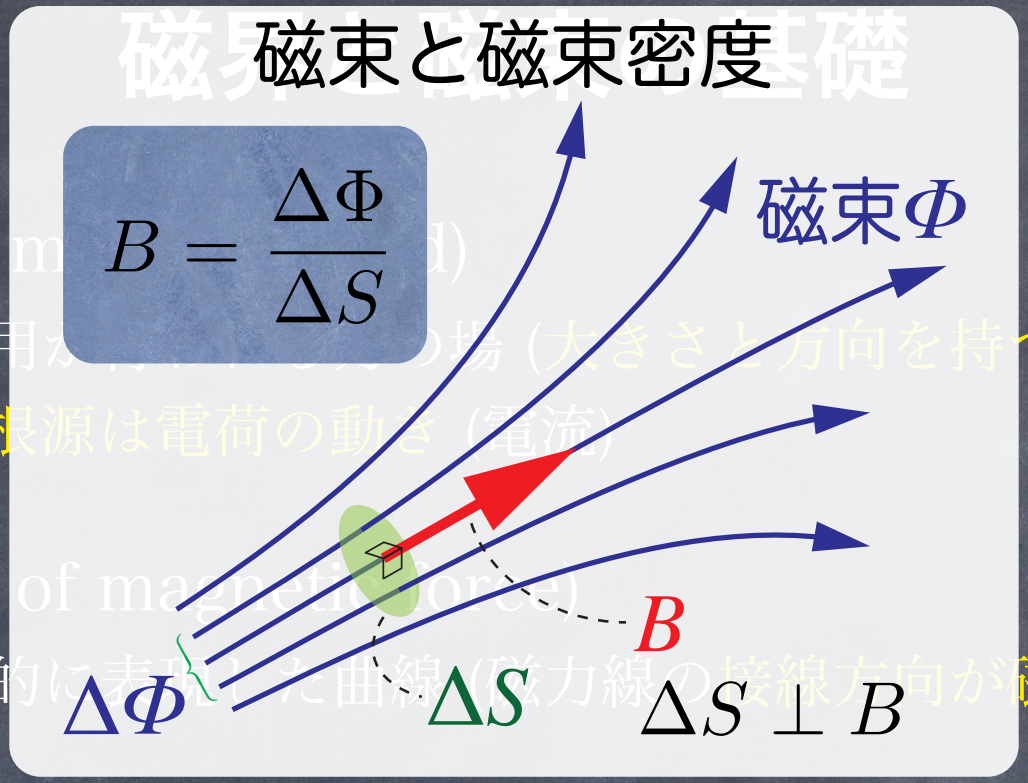


磁束と磁束密度



- **磁界** (磁場：magnetic field)
  →磁気的な作用が行われる力の場 (大きさと方向を持つベクトル場)
  全ての磁場の根源は電荷の動き (電流)
- **磁力線** (line of magnetic force)
  →磁界を視覚的に表現した曲線 (磁力線の接線方向が磁界の方向)
- **磁束** (magnetic flux)
  →磁界の強さを線の束で表現したもの：記号 Φ、単位 Wb (ウェーバ)
  磁束の方向は磁界(磁力線)の方向と同じ
  磁束には発生点や消滅点はなく、至る所で連続な環状の線

磁束と磁束密度



- **磁界** (磁場：m d)
  →磁気的な作用が存在する空間の場 (大きさと方向を持つベクトル場)
  全ての磁場の根源は電荷の動き (電流)

- **磁力線** (line of magnetic force)
  →磁界を視覚的に表現した曲線 (磁力線の接線方向が磁界の方向)

- **磁束** (magnetic flux)
  →磁界の強さを線の束で表現したもの：記号 Φ、単位 Wb (ウェーバ)
  磁束の方向は磁界(磁力線)の方向と同じ
  磁束には発生点や消滅点はなく、至る所で連続な環状の線

- **磁束密度** (magnetic flux density)
  →単位面積当りの磁束の本数：記号 B、単位 T (テスラ)=Wb/m^2
  (大きさと方向を持つベクトル場：方向は磁界の方向と同じ)

電場と磁場の類似点・相違点

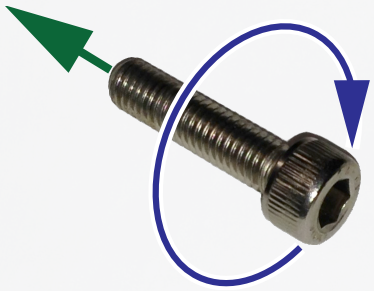
電場	電荷 q (C)	電界 E (V/m)	電束密度 $D=\varepsilon_0 E+P$ (C/m^2)
磁場	磁荷 m (Wb)	磁界 $H=B/\mu_0-M$ (A/m)	磁束密度 B (T=Wb/m^2)

ε_0: 真空の誘電率、μ_0: 真空の透磁率、P: 分極、M: 磁化

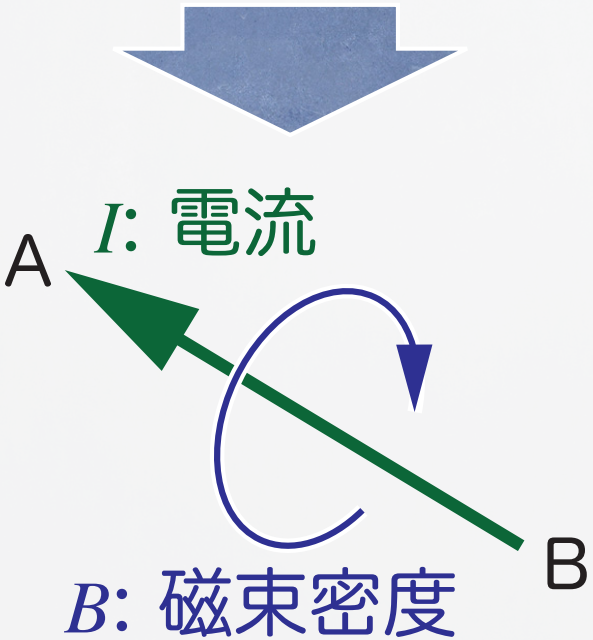
- 電場の根源は正或は負の電荷→電界 $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$
- 磁場の根源は電荷の動き→磁束密度 $B = \displaystyle\int \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi r^2} dI$
- 磁荷は仮想的な物理量 (単独磁荷は存在しない)

アンペアの右ネジの法則(電流が作る磁界の方向)

電流と磁界の関係に置き換える

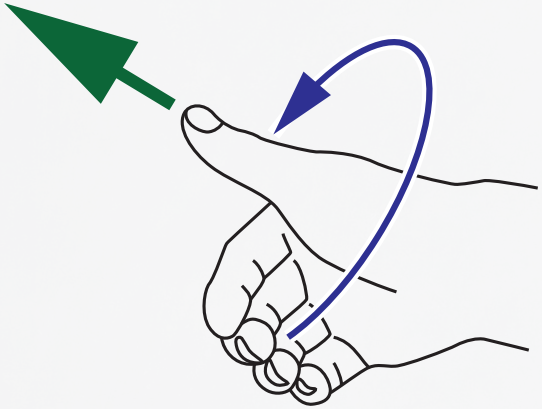


右ねじ

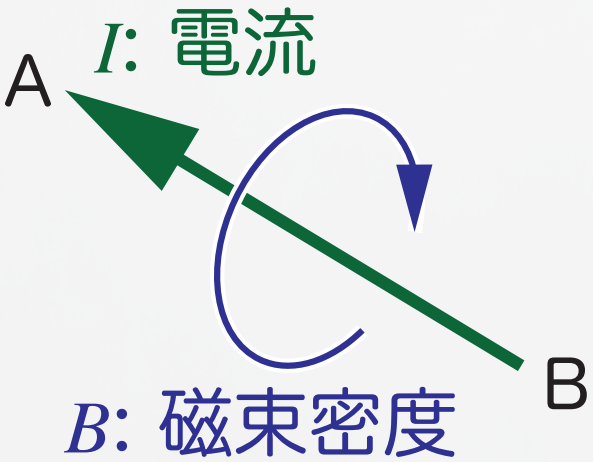


アンペアの右ネジの法則(電流が作る磁界の方向)

電流と磁界の関係に置き換える

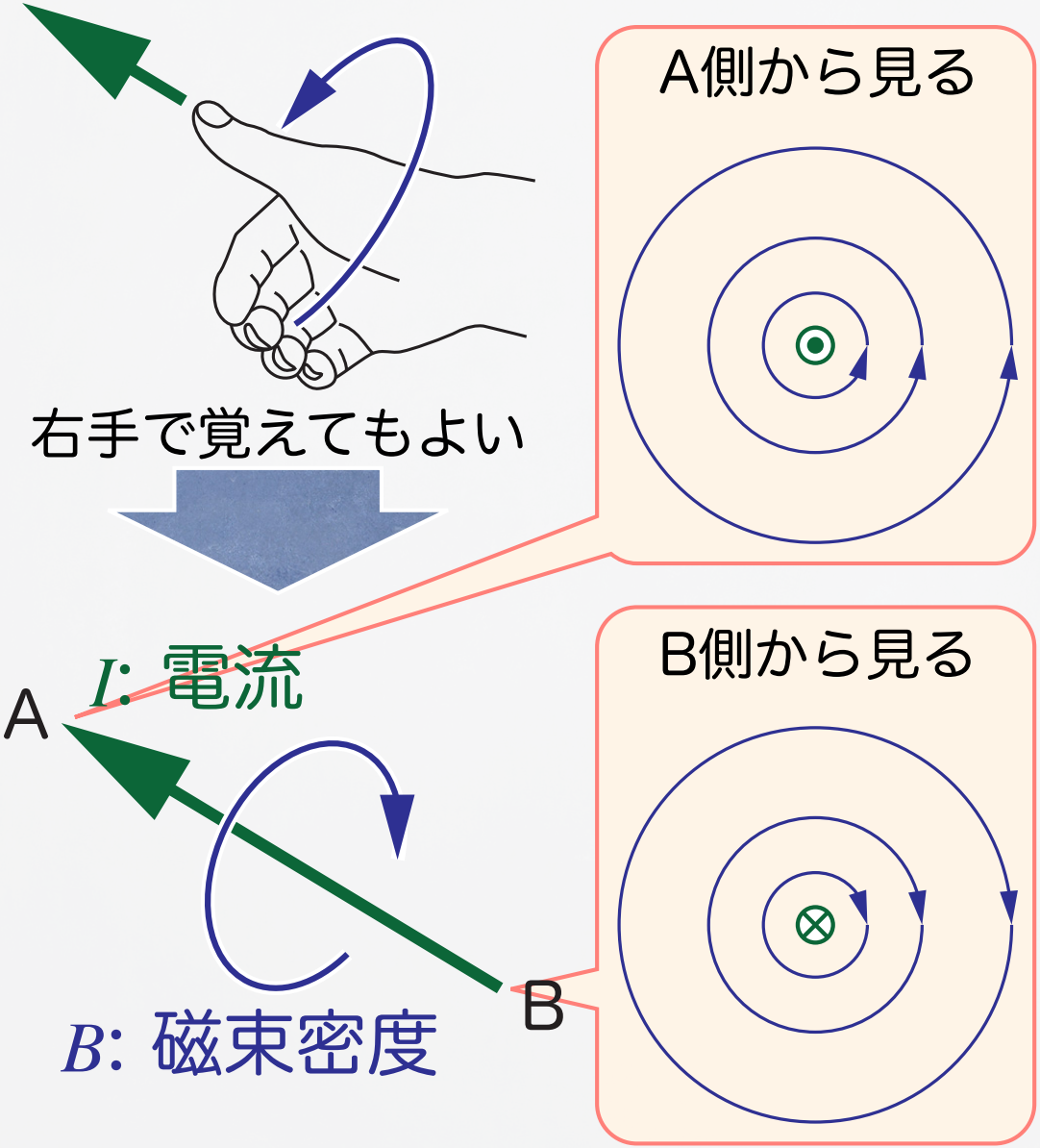


右手で覚えてもよい



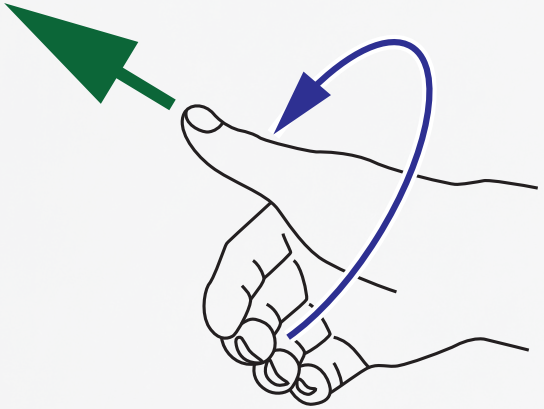
アンペアの右ネジの法則(電流が作る磁界の方向)

電流と磁界の関係に置き換える



アンペアの右ネジの法則(電流が作る磁界の方向)

電流と磁界の関係に置き換える



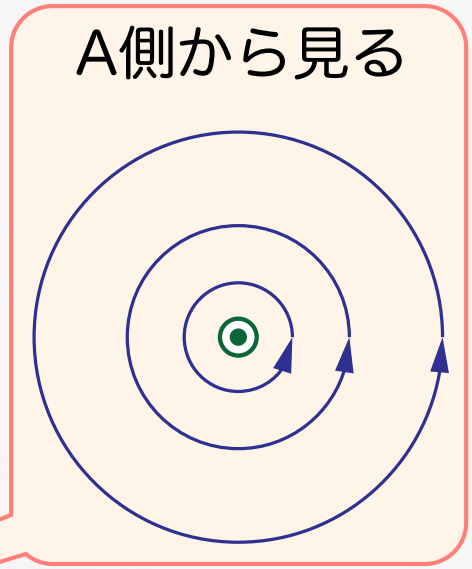
右手で覚えてもよい

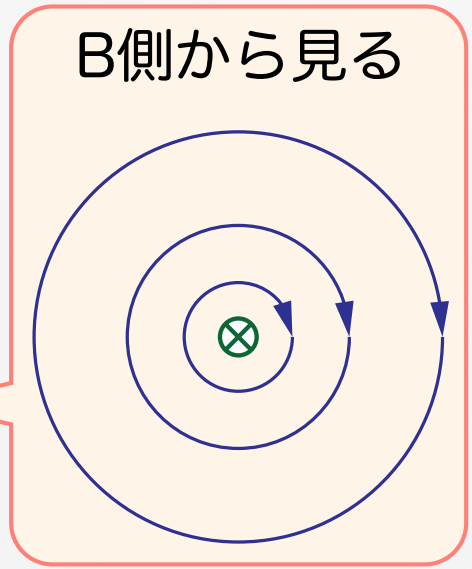
A

I: 電流

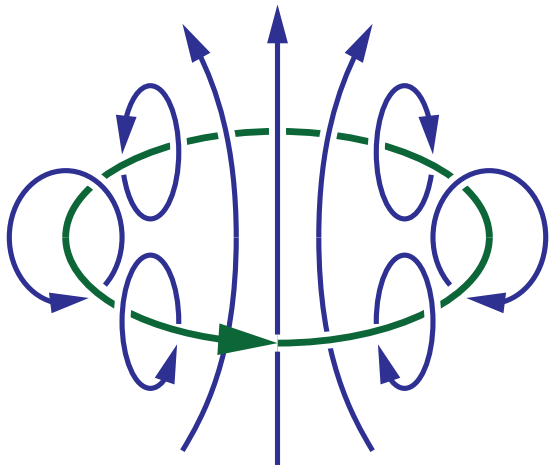
B

B: 磁束密度

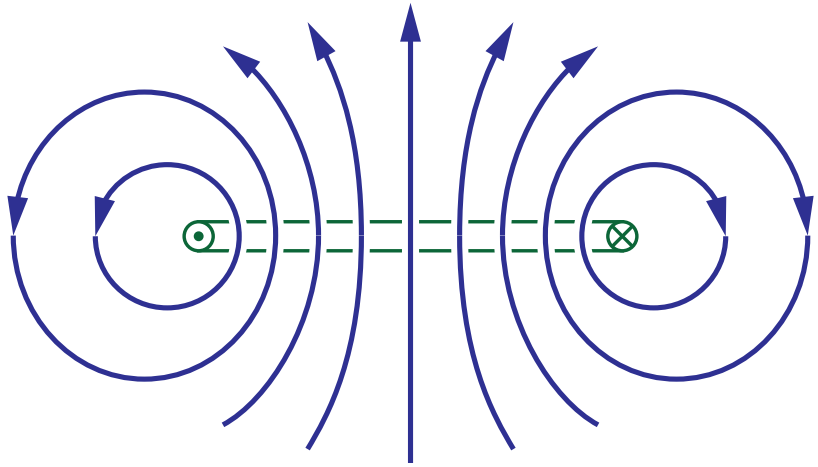




円形ループ電流の場合

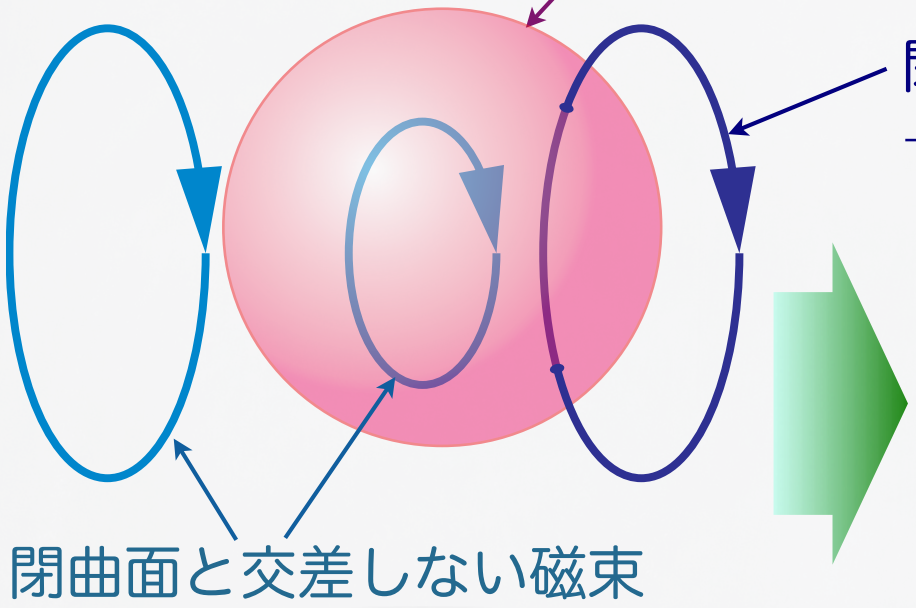


断面図



磁束密度に関するガウスの法則

磁束(発生や消滅はせず環状に繋がっている)



任意の閉曲面に出入りする
磁束の総和は常に0

$$\sum \Delta\Phi_i = \sum B_i \Delta S_i = 0$$

閉曲面Sに対する面積分で表すと

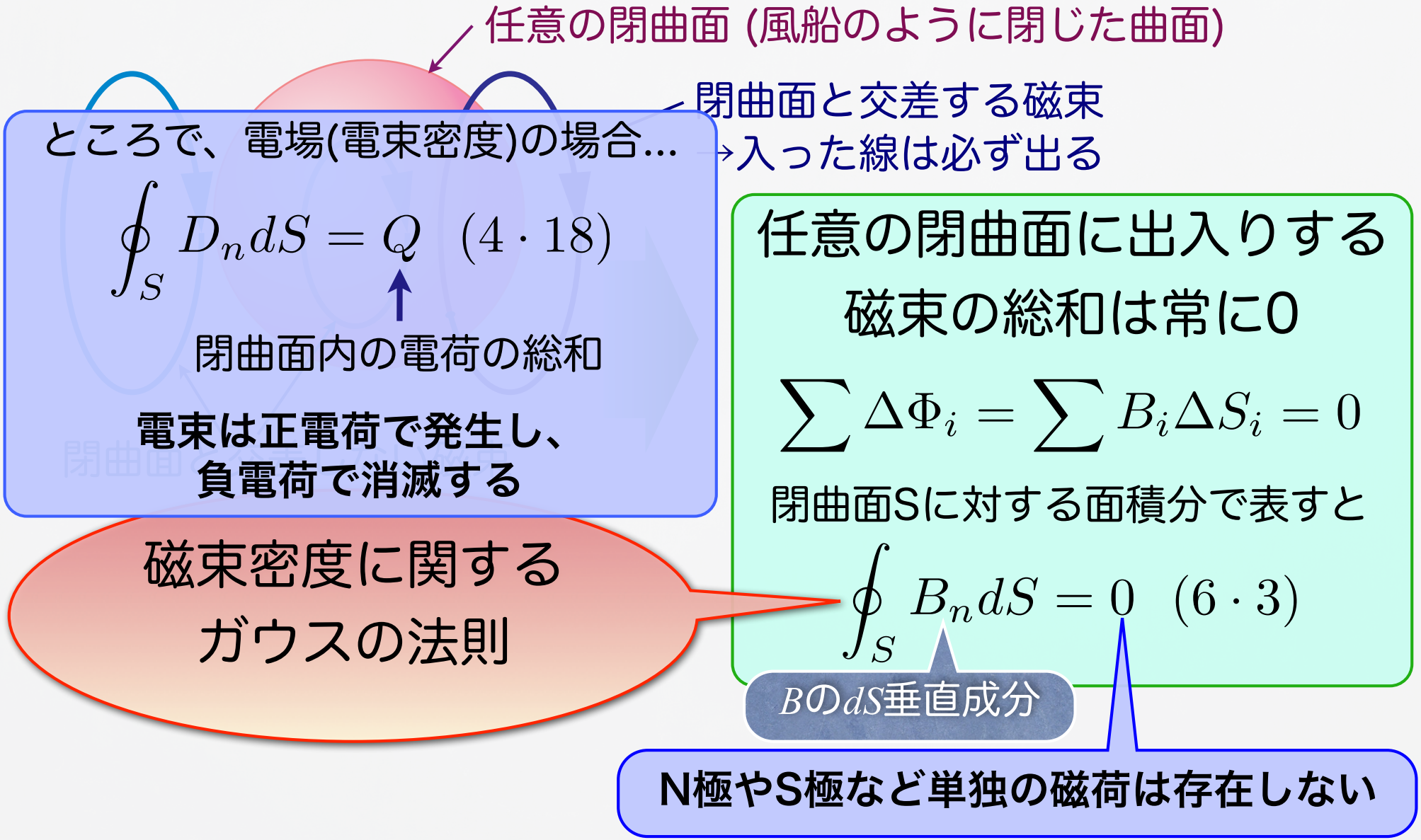
$$\oint_S B_n dS = 0 \quad (6\cdot 3)$$

BのdS垂直成分

磁束密度に関する
ガウスの法則

磁束密度に関するガウスの法則

磁束(発生や消滅はせず環状に繋がっている)



ところで、電場(電束密度)の場合...

$$\oint_S D_n dS = Q \quad (4 \cdot 18)$$

閉曲面内の電荷の総和

電束は正電荷で発生し、負電荷で消滅する

磁束密度に関するガウスの法則

任意の閉曲面に出入りする磁束の総和は常に0

$$\sum \Delta\Phi_i = \sum B_i \Delta S_i = 0$$

閉曲面Sに対する面積分で表すと

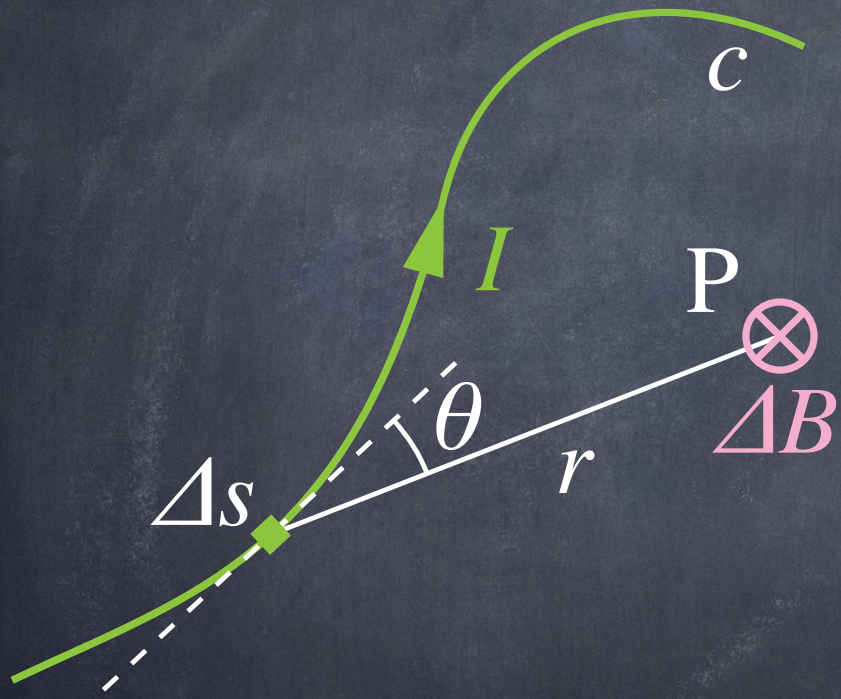
$$\oint_S B_n dS = 0 \quad (6 \cdot 3)$$

BのdS垂直成分

N極やS極など単独の磁荷は存在しない

ビオ・サバールの法則(電流から磁束密度を求める)

線状の経路を流れる電流がP点に作る磁束密度を求める



Δsの微小部分がP点に作る微小磁束密度ΔBは

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I \Delta s \sin\theta}{4\pi r^2} \quad [\mathrm{T}] \ (6\cdot 4)$$

ビオ・サバールの法則は微分表現

P点の磁束密度Bは、Δsの部分を電流経路(c)に沿って足し合わせる(線積分する)ことで求める。

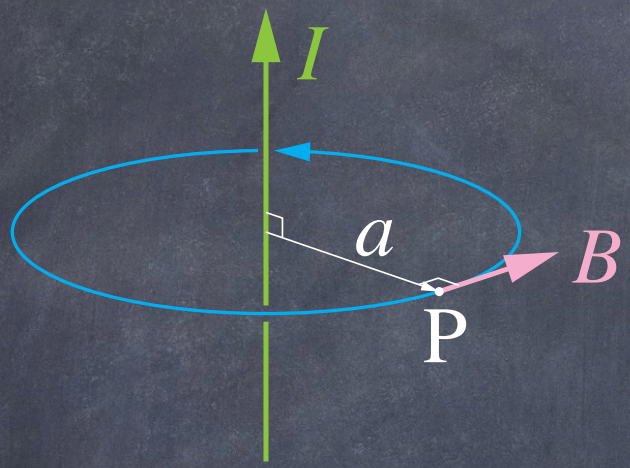
$$B = \sum \Delta B_i = \int_c dB$$

ビオ・サバールの法則の適応例

教科書 p84～p86

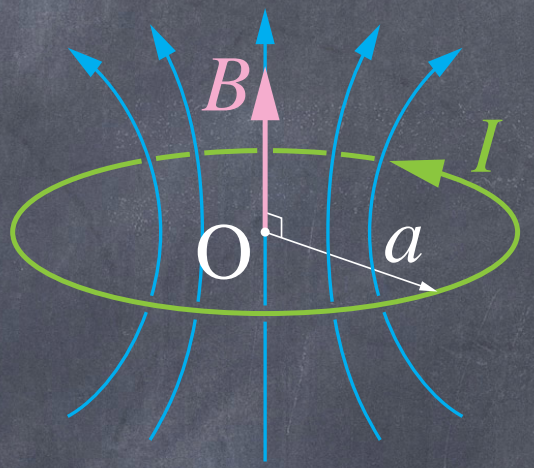
単純な形状を持つ電流による磁界

無限直線電流
(電流からa離れた点P)



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \ [\mathrm{T}] \quad (6\cdot 8)$$

円形ループ電流
(半径aのループの中心点O)



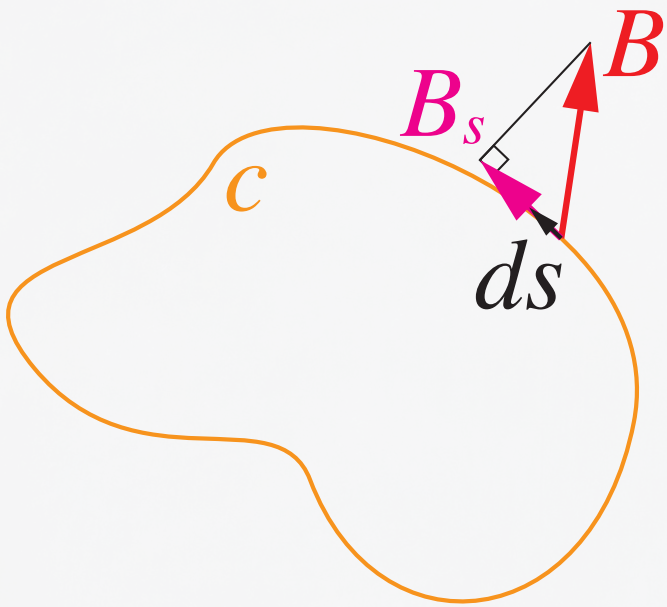
$$B = \frac{\mu_0 I}{2a} \ [\mathrm{T}] \quad (6\cdot 11)$$

N回巻きコイルの場合は、
電流がN倍と考える

単純な形状の組み合わせの場合は、それぞれの部分から得られる磁束密度を、方向を考慮して(ベクトルとして)足し合わせる

アンペアの周回積分の法則

ベクトルの周回積分(閉曲線に沿った線積分)



閉曲線cの微小部分dsと、Bのds平行成分(cに対する接線成分)の積(ベクトルの内積)を、一周分にわたって積算したもの

アンペアの周回積分の法則

任意の閉曲線に沿って磁束密度を積分(線積分)

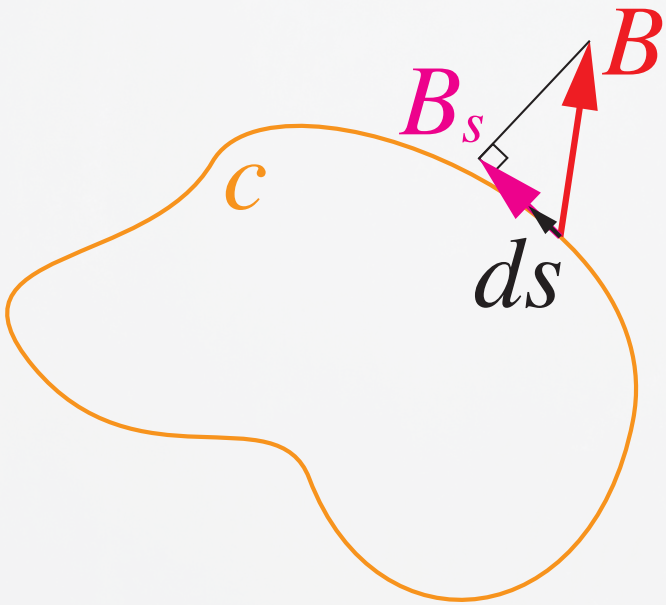
$$\oint_c B_s ds = \mu_0 \sum I_i \quad (6 \cdot 17)$$

積分経路に鎖交している電流

経路cに沿った線積分

磁束密度の接線方向成分

ベクトルの周回積分(閉曲線に沿った線積分)



閉曲線cの微小部分dsと、Bのds平行成分(cに対する接線成分)の積(ベクトルの内積)を、一周分にわたって積算したもの

アンペアの周回積分の法則

任意の閉曲線に沿って磁束密度を積分(線積分)

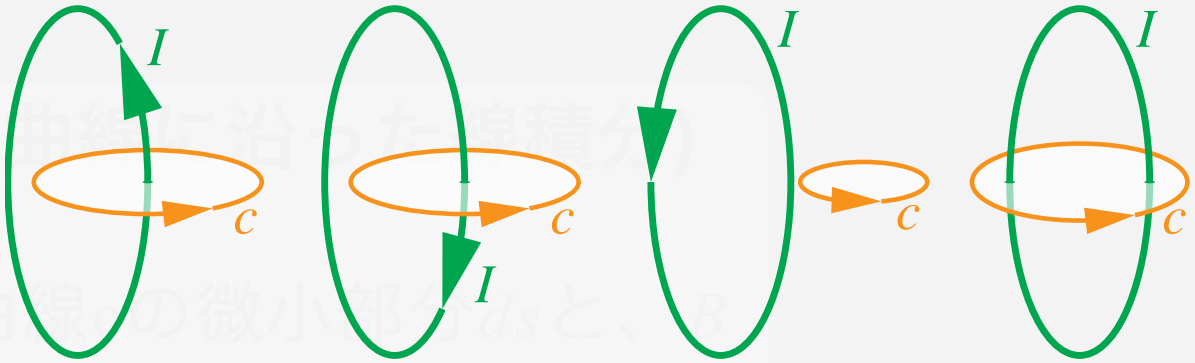
$$\oint_c B_s ds = \mu_0 \sum I_i \quad (6 \cdot 17)$$

経路cに沿った線積分

磁束密度の接線方向成分

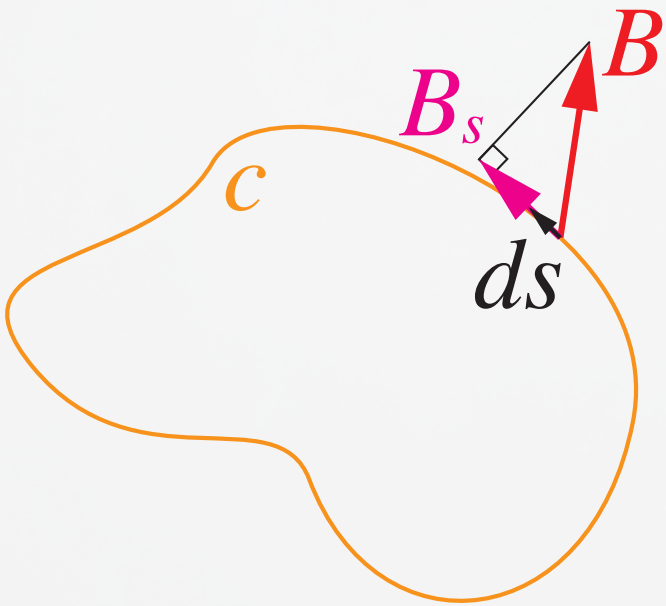
積分経路に鎖交している電流

鎖交とは



正に鎖交　負に鎖交　鎖交しない

ベクトルの周回積分(閉



閉曲線の微小部分dsと、Bのds方向成分(接線成分)の積(ベクトルの内積)を、一周分にわたって積算したもの

アンペアの周回積分の法則

任意の閉曲線に沿って磁束密度を積分(線積分)

$$\oint_c B_s ds = \mu_0 \sum I_i \quad (6 \cdot 17)$$

経路cに沿った線積分

磁束密度の接線方向成分

積分経路に鎖交している電流

アンペアの周回積分の法則は、ビオ・サバールの法則を積分表現したものであり、本質的にビオ・サバールの法則と等価である。

電流が電流密度Jで分布している場合

$$\oint_c B_s ds = \mu_0 \int_S J_n dS \quad (6 \cdot 18)$$

経路cに囲まれた面Sに対する面積分

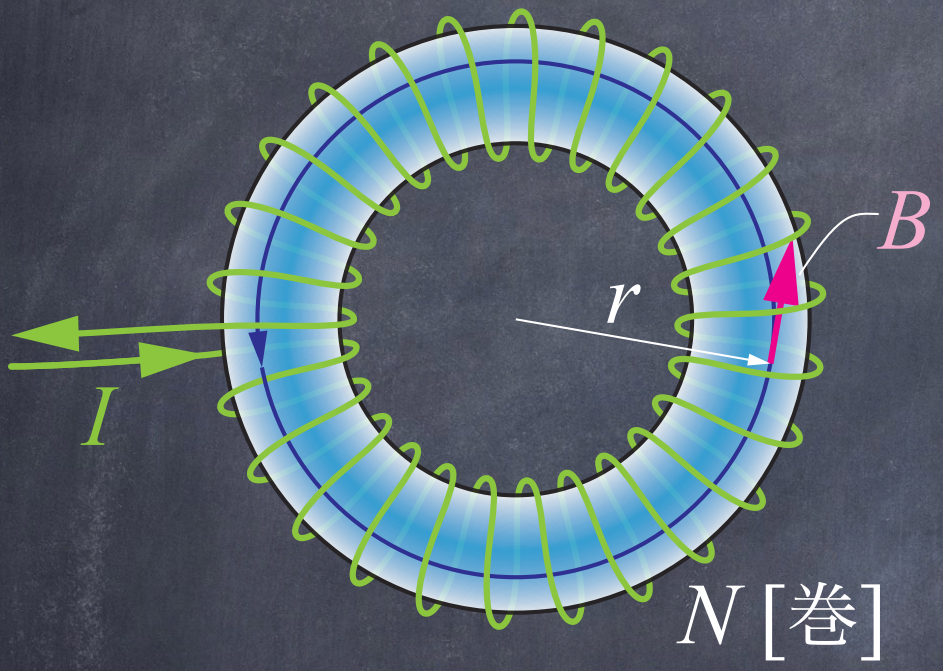
電流密度のdS垂直成分

アンペアの周回積分の法則の適応例

教科書 p103～p107

ソレノイドによる磁界

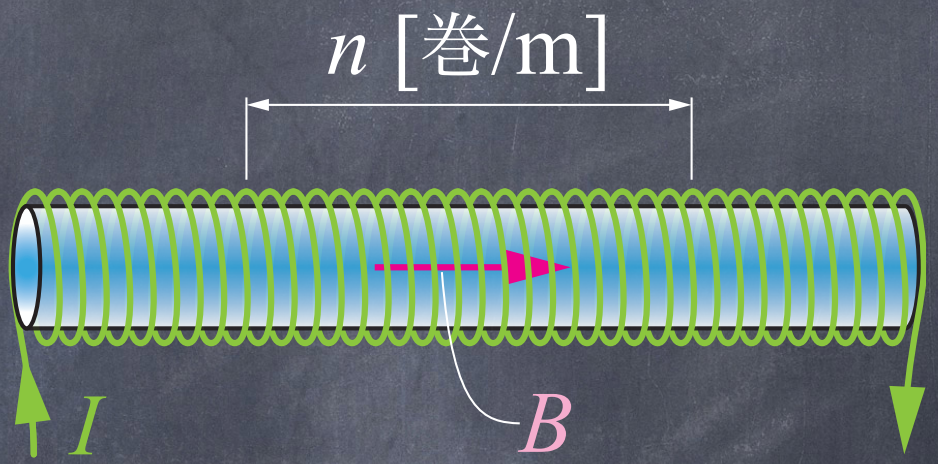
無端環状ソレノイド
(中心からr離れた位置)



$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \quad [\mathrm{T}] \quad (6 \cdot 24)$$

- 磁束密度は半径rに依存
- ソレノイド外部の磁束密度は0

無限長ソレノイド
(ソレノイド内)

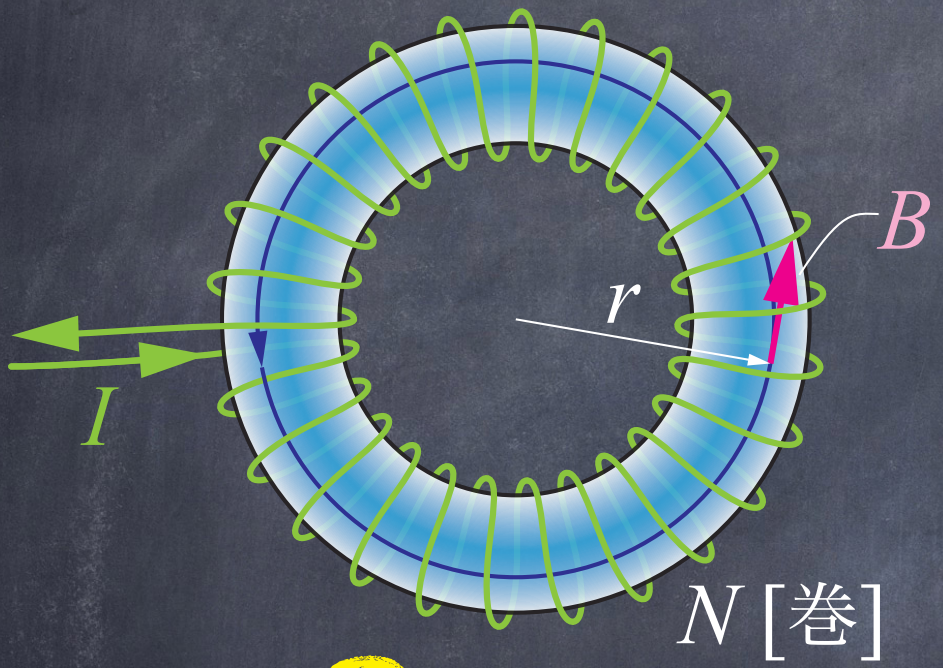


$$B = \mu_0 n I \quad [\mathrm{T}] \quad (6 \cdot 27)$$

- 十分に細長い場合は、ソレノイド内部はどこでも一定の磁束密度
- ソレノイド外部の磁束密度は0

ソレノイドによる磁界

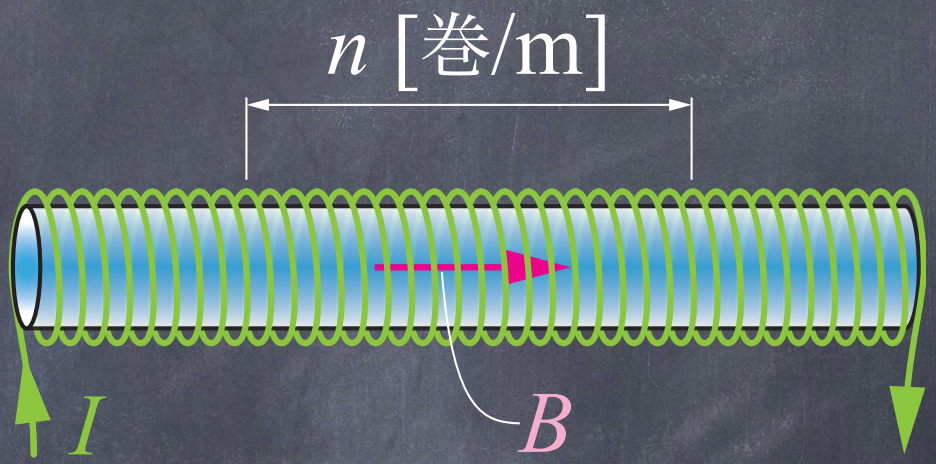
無端環状ソレノイド
(中心からr離れた位置)



$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \ [\mathrm{T}] \quad (6 \cdot 24)$$

- 磁束密度は半径rに依存
- ソレノイド外部の磁束密度は0

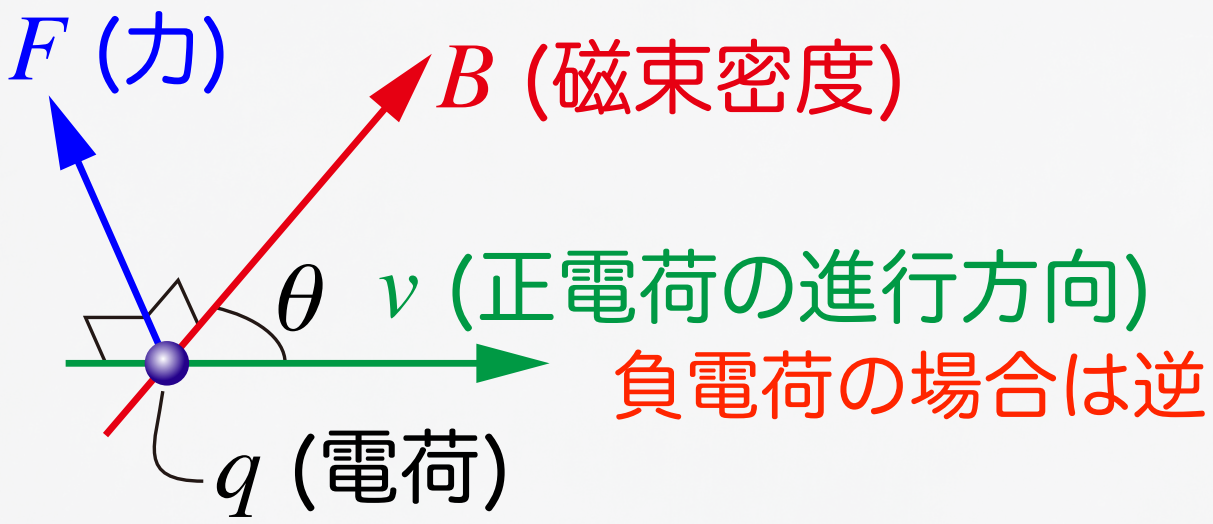
無限長ソレノイド
(ソレノイド内)

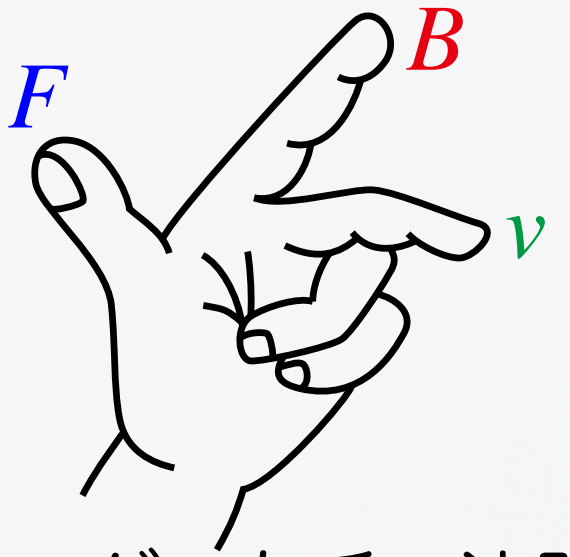


$$B = \mu_0 n I \ [\mathrm{T}] \quad (6 \cdot 27)$$

- 十分に細長い場合は、ソレノイド内部はどこでも一定の磁束密度
- ソレノイド外部の磁束密度は0

ローレンツ力(運動する電荷が磁界から受ける力)



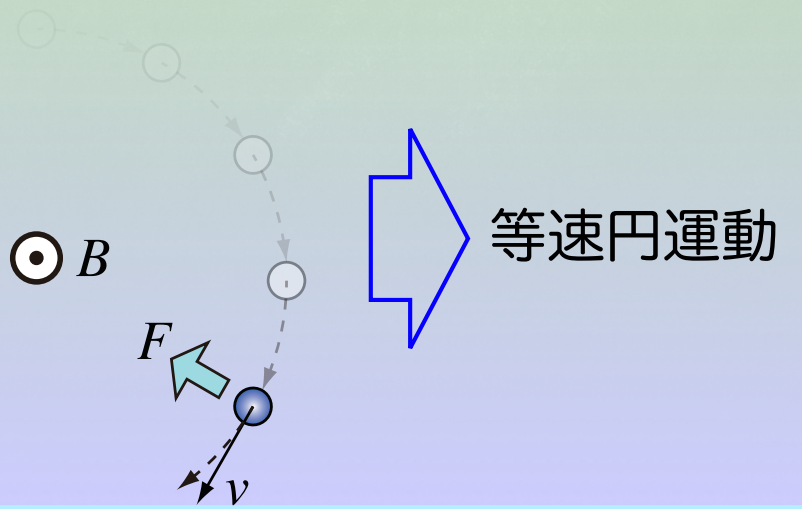


フレミングの左手の法則
(中指から順に「電・磁・力」)

$$F = qvB\sin\theta \ \ [\mathrm{N}] \quad (6\cdot 1)$$

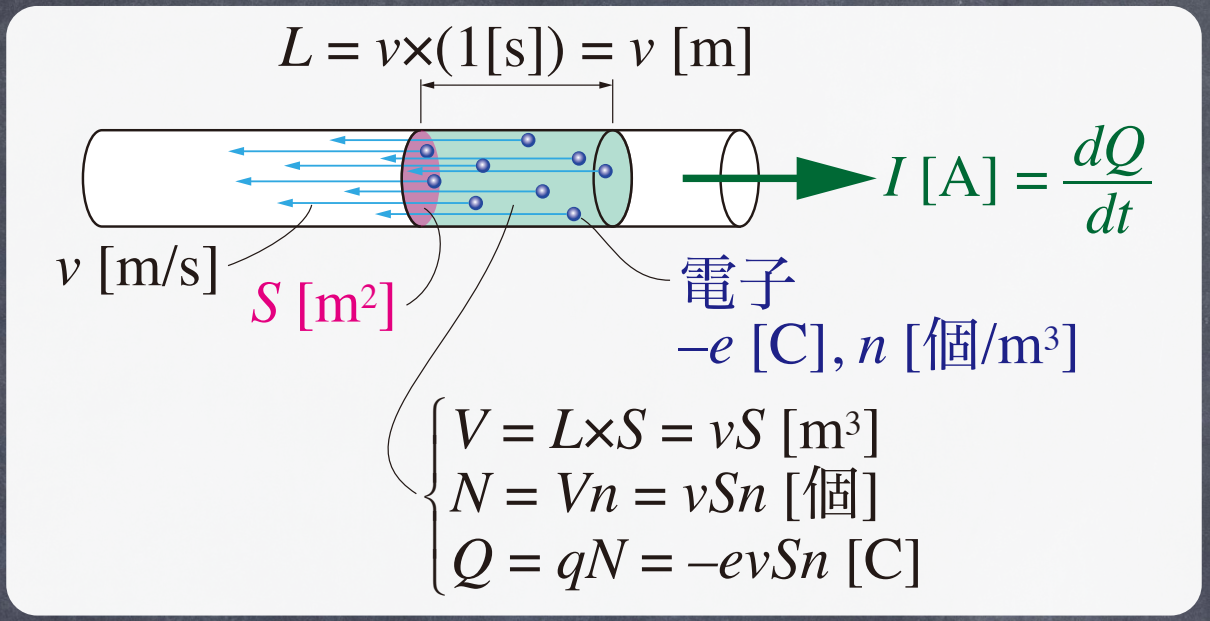
vとBが平行のときはF=0
vとBが垂直のときはF最大

均一磁場に垂直入射した電荷



電磁力(電流が磁界から受ける力)

ローレンツ力($F = qvB\sin\theta$)から電流(I)が磁界(B)から受ける力を求める



- 電子は速度vで電流と反対方向へ移動
- 1秒間で移動する電荷の総量は $-evSn$
- 電流は単位時間当りの電荷の移動量で
  $I = -Q = evSn$
- 一つの電子に働く力の大きさは
  $f = evB\sin\theta$
- 長さLの電線に働く力の総量は
  $F_L = Nf = vSne\ v\ B\sin\theta = I\ L\ B\sin\theta$
- 単位長さの電線に働く力は
  $F = F_L/L = IB\sin\theta\ [\mathrm{N/m}]$ (6.29)

電流が受ける力の方向はローレンツ力と同じで、
フレミングの左手の法則に従う

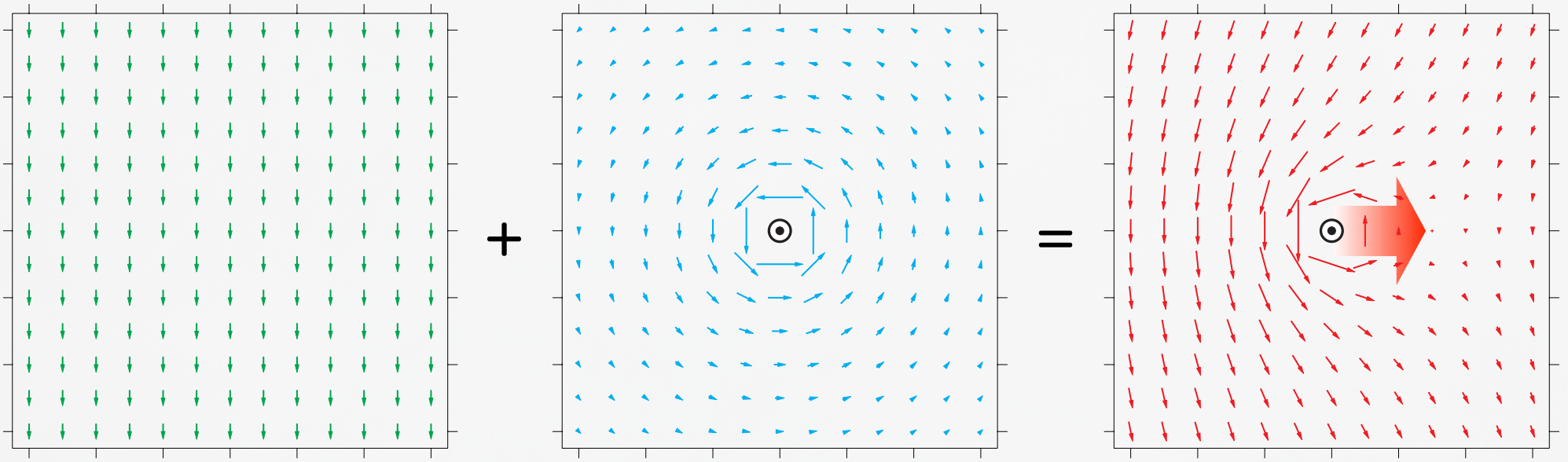
ローレンツ力・電磁力の応用例

- ローレンツ力を利用したもの
  - 電子レンズ (電子顕微鏡)
  - 電子分光器 (元素分析)
- 電磁力を利用したもの
  - 電磁石 (リニアモーターカー)
  - 電気モーター
  - アナログ式電流・電圧計

電磁力の計算例

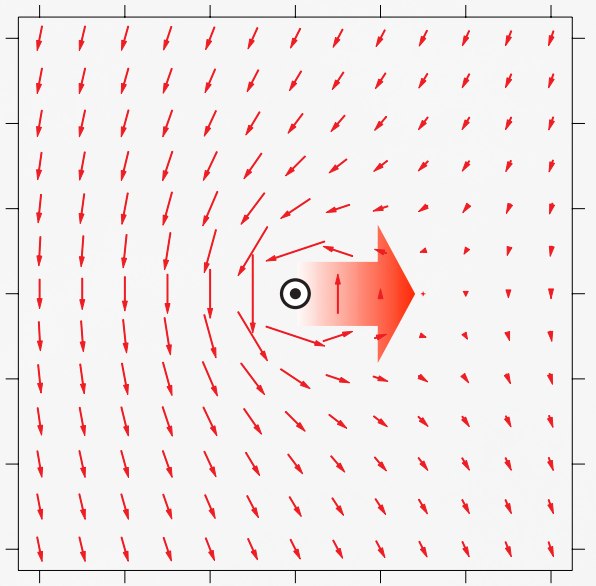
教科書 p95～p96

磁界におけるマクスウエルの応力



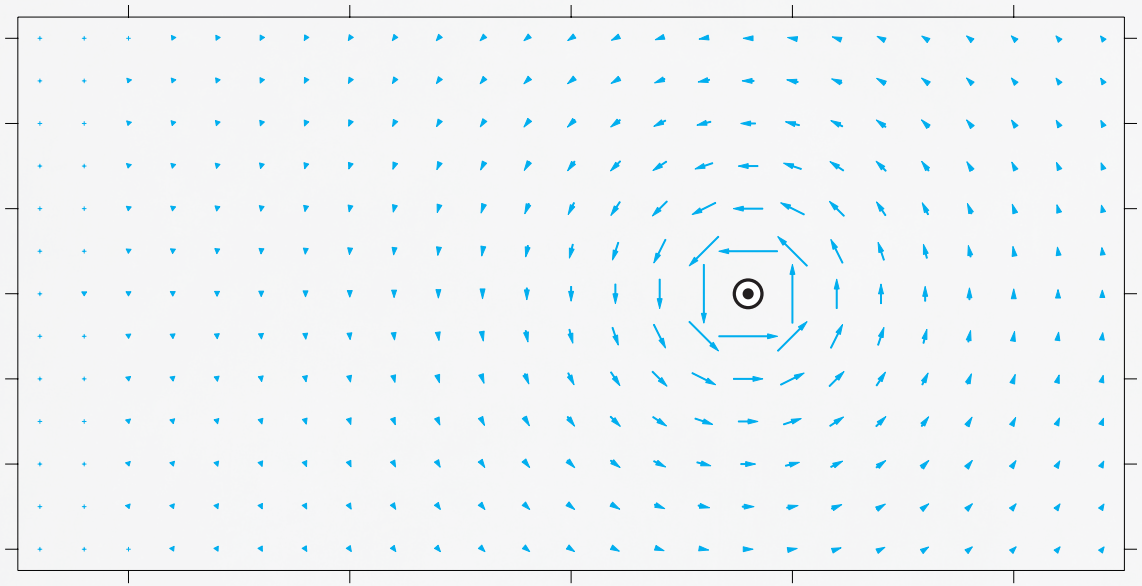
均一磁場　　直線電流　　均一磁場中の直線電流

磁界におけるマクスウエルの応力

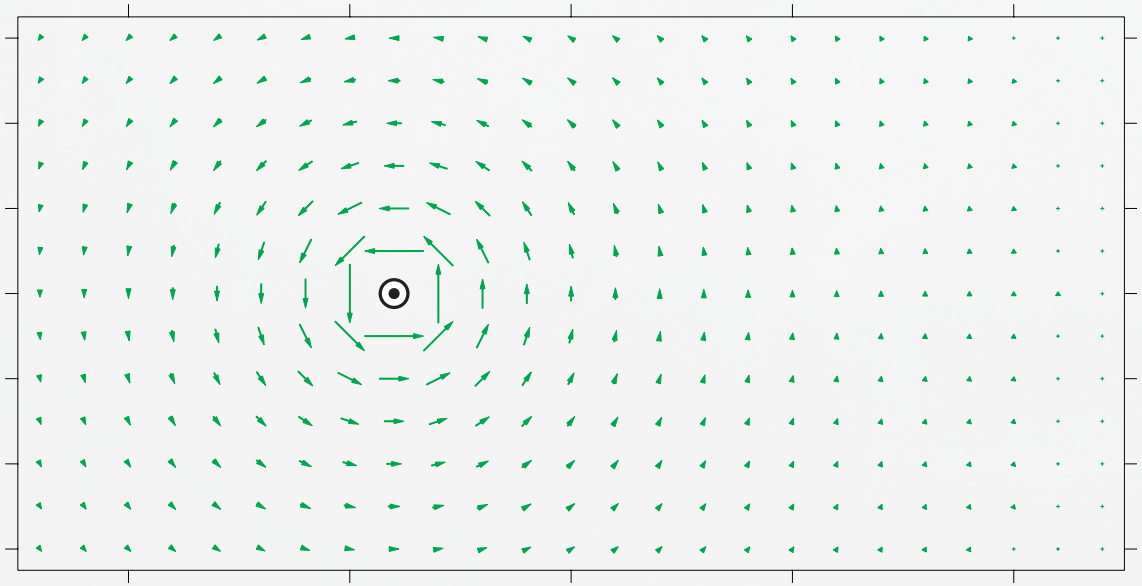


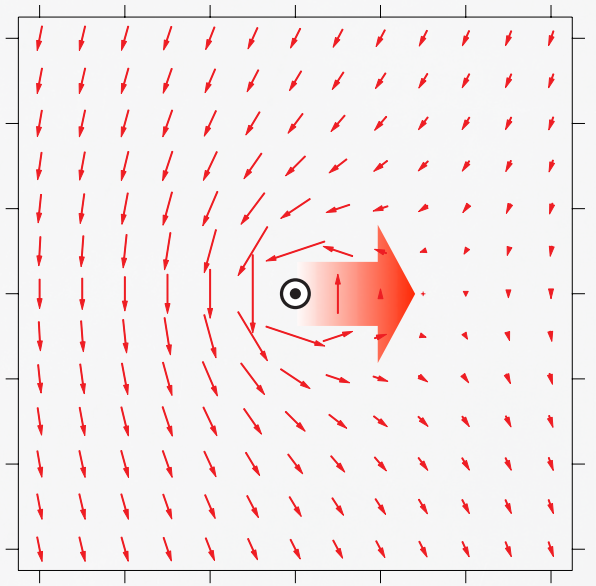
均一磁場中の直線電流

磁界におけるマクスウエルの応力



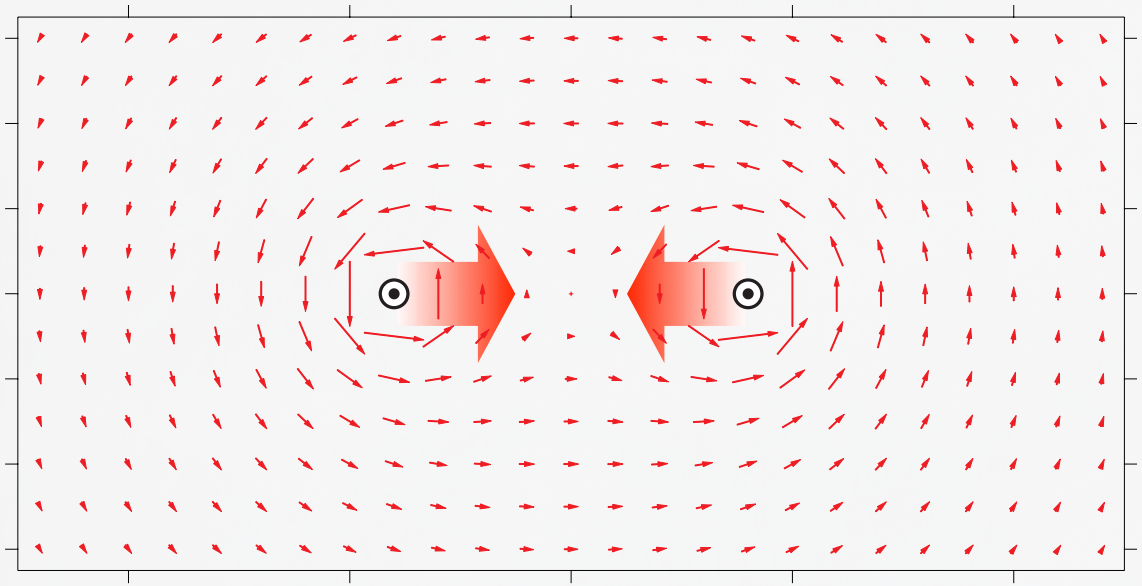
+



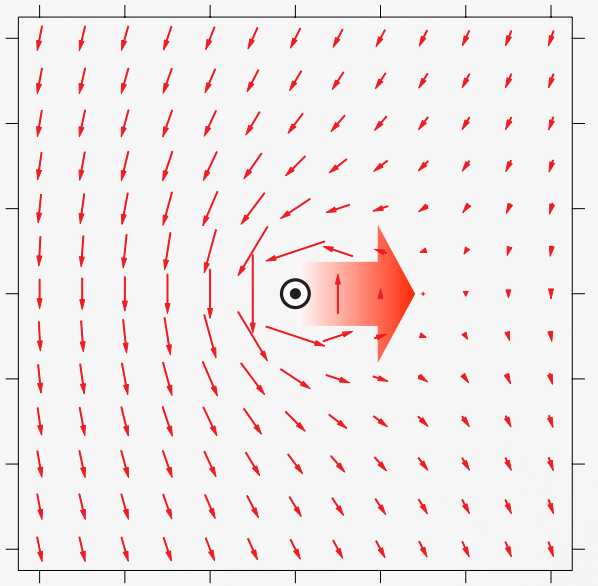


均一磁場中の直線電流

磁界におけるマクスウエルの応力

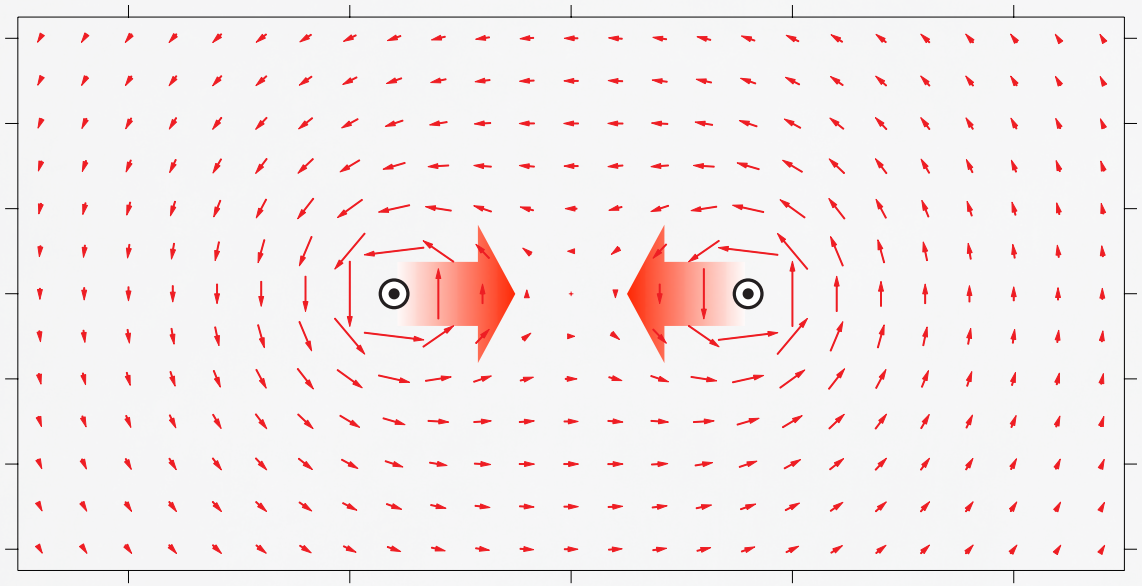


平行電流

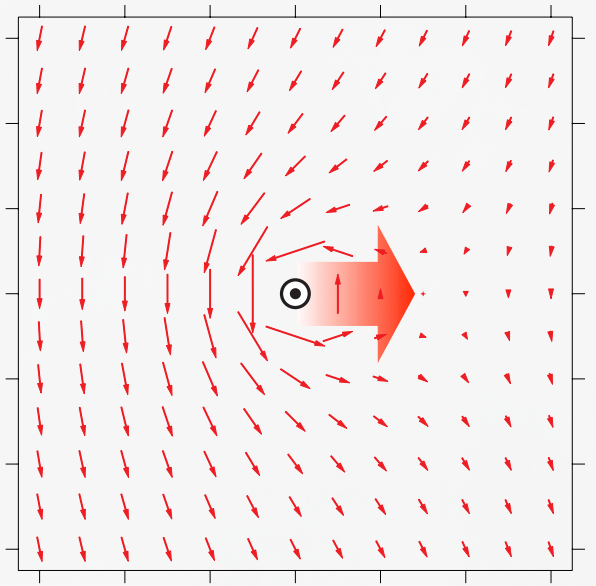


均一磁場中の直線電流

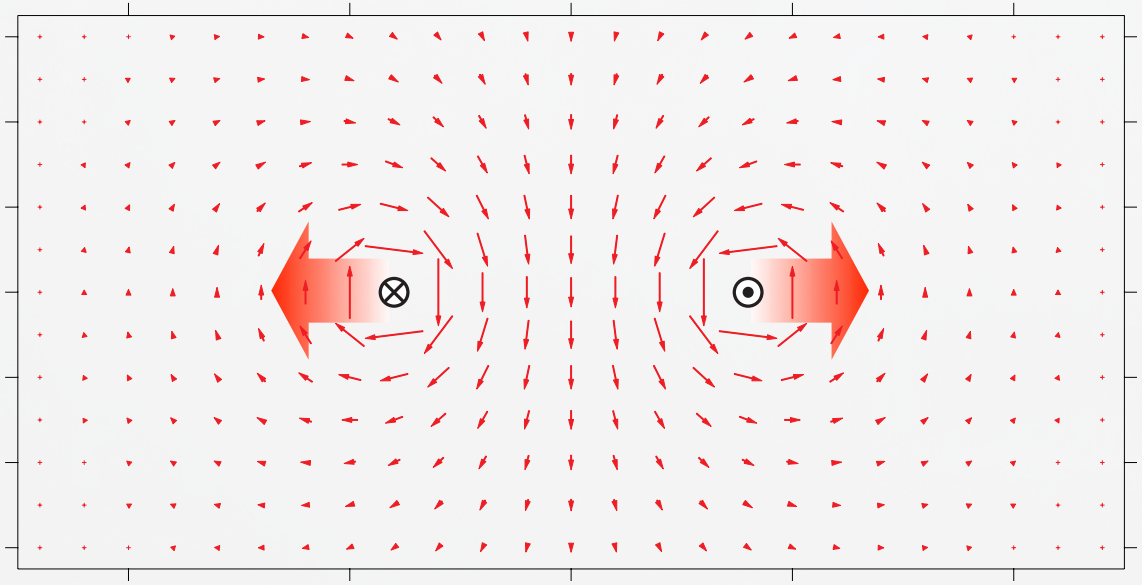
磁界におけるマクスウエルの応力



平行電流

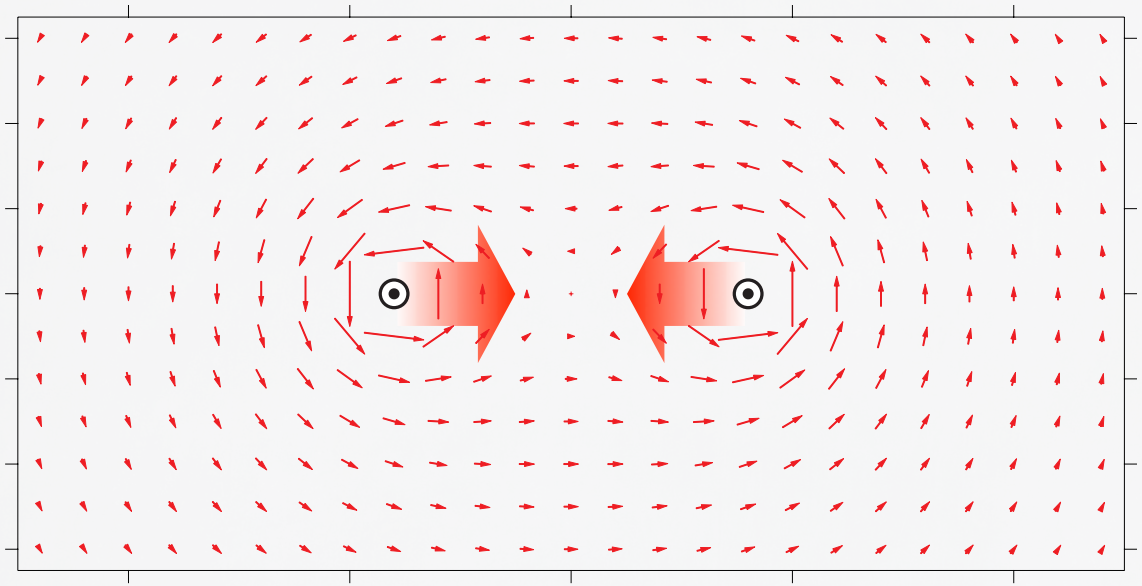


均一磁場中の直線電流

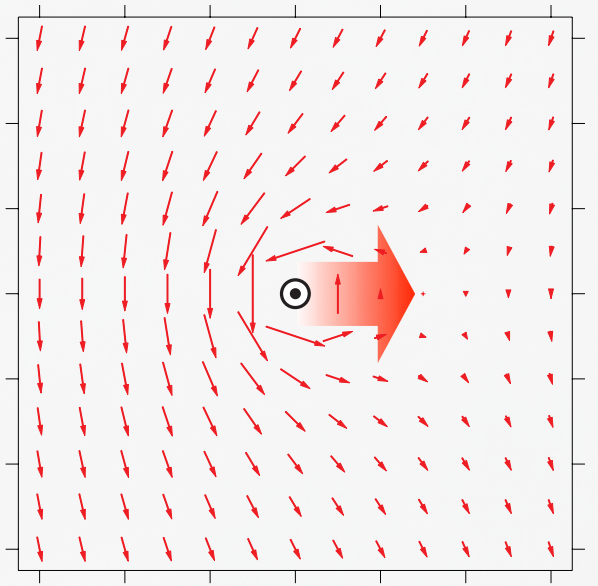


反平行電流

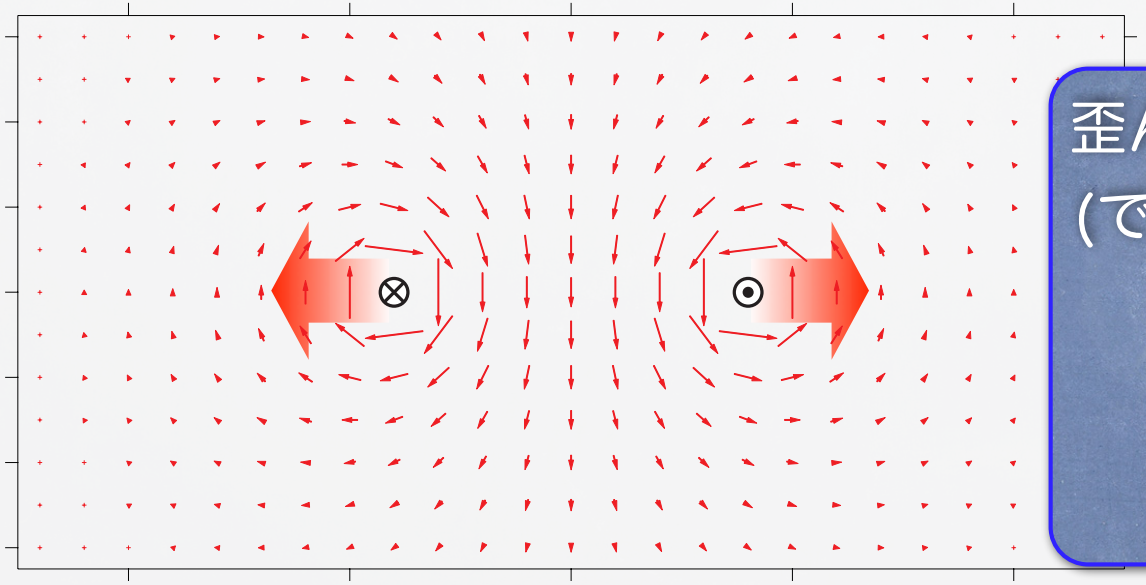
磁界におけるマクスウエルの応力



平行電流



均一磁場中の直線電流



反平行電流

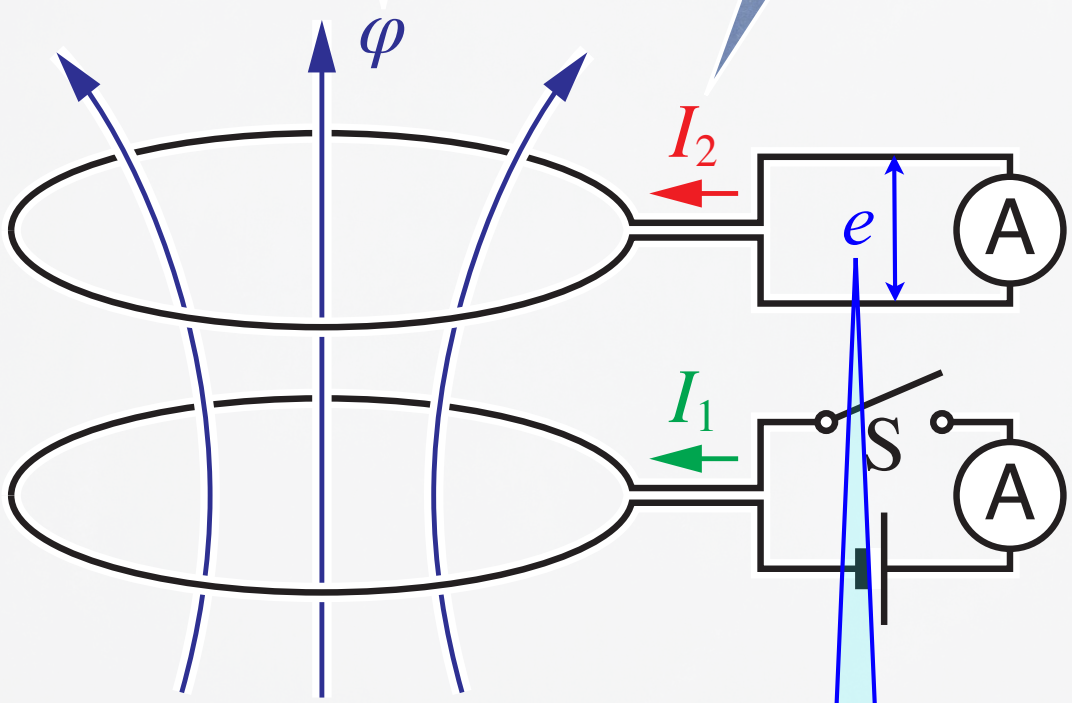
歪んだ磁場(磁力線)を均一な状態
(できるだけまっすぐ、等間隔)に
戻そうとする作用を
「マクスウエルの応力」
と呼ぶ。

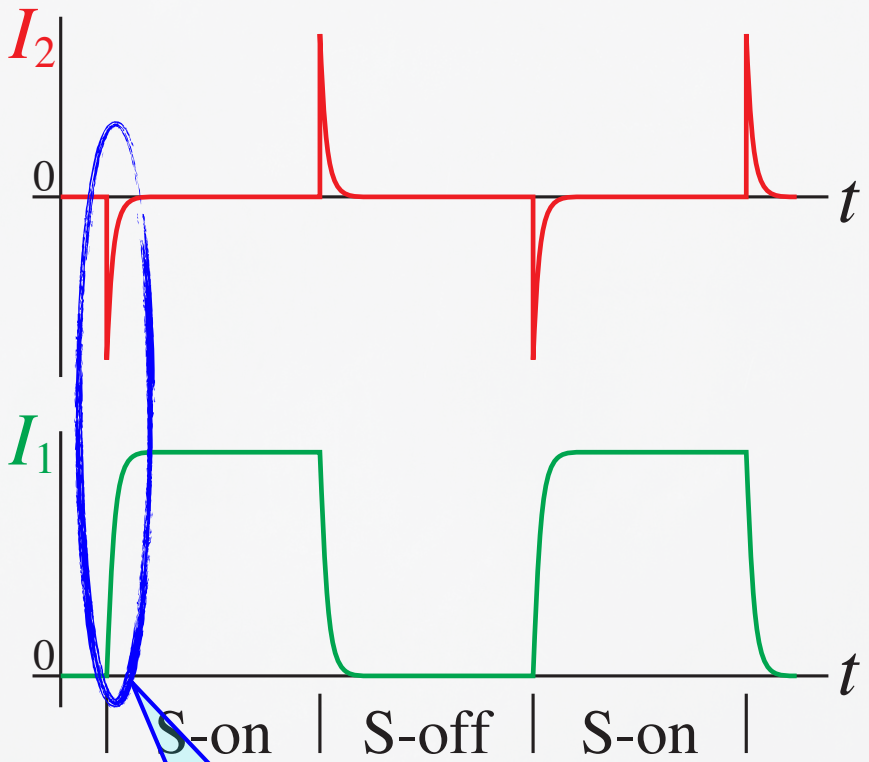
第8章：電磁誘導

電磁誘導・ファラデーの法則

磁束鎖交数：二次コイルと鎖交する全磁束数

誘導電流 (induction current)





誘導起電力 (ファラデーの法則)

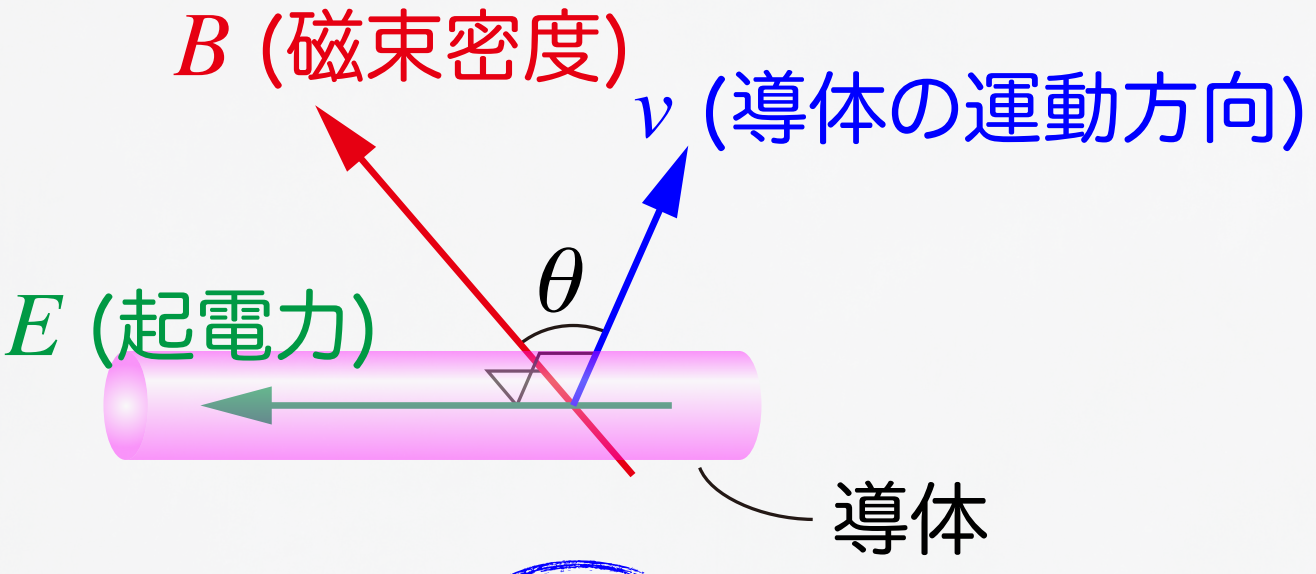
$$e = -\frac{d\varphi}{dt} \ [\mathrm{V}] \quad (8\cdot 1)$$

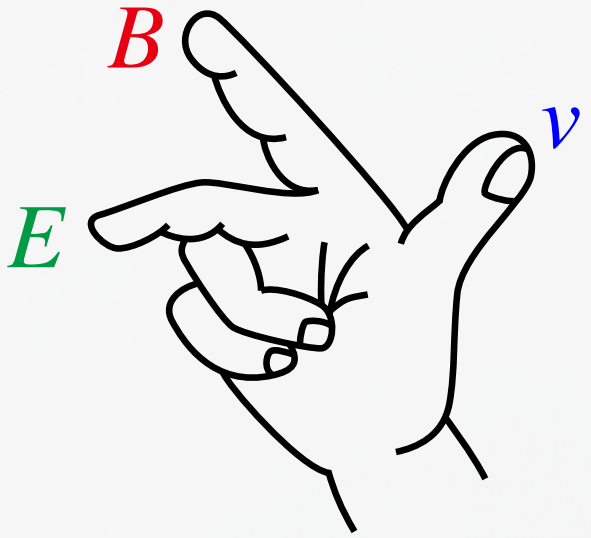
I_1による磁束変化を打ち消す方向にI_2が流れる
→レンツの法則

ファラデーの法則の適応例

教科書 p117

磁場中で運動する導体に生じる起電力





フレミングの右手の法則
(中指から順に「電・磁・力」)

$$E = vB\sin\theta\ [\mathrm{V/m}] \quad (8\cdot3)$$

単位長さ当りの起電力

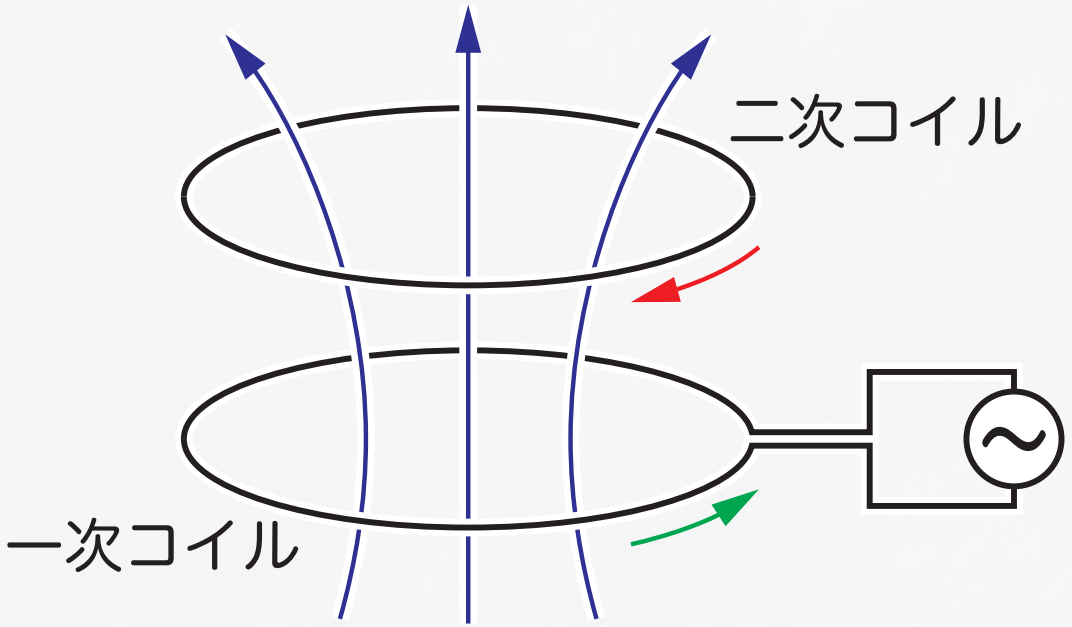
vとBが平行のときはE=0
vとBが垂直のときはE最大

【左右の覚え方】
みぎ(右)はき、(起電力)
Left(左)はLorentz(ローレンツ)力

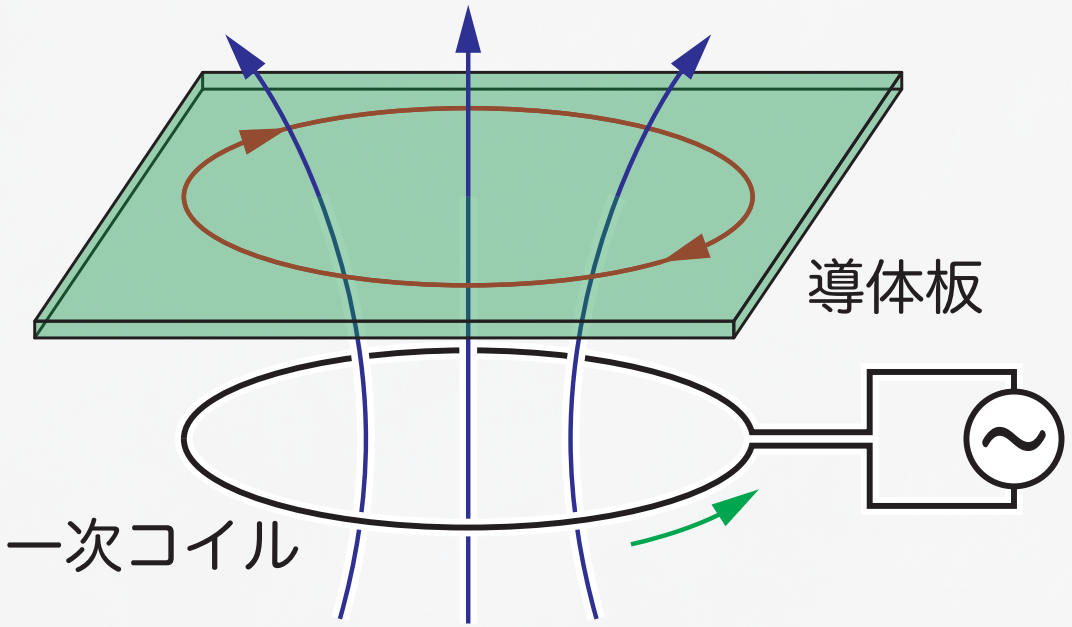
導体運動による起電力の適応例

教科書 p139

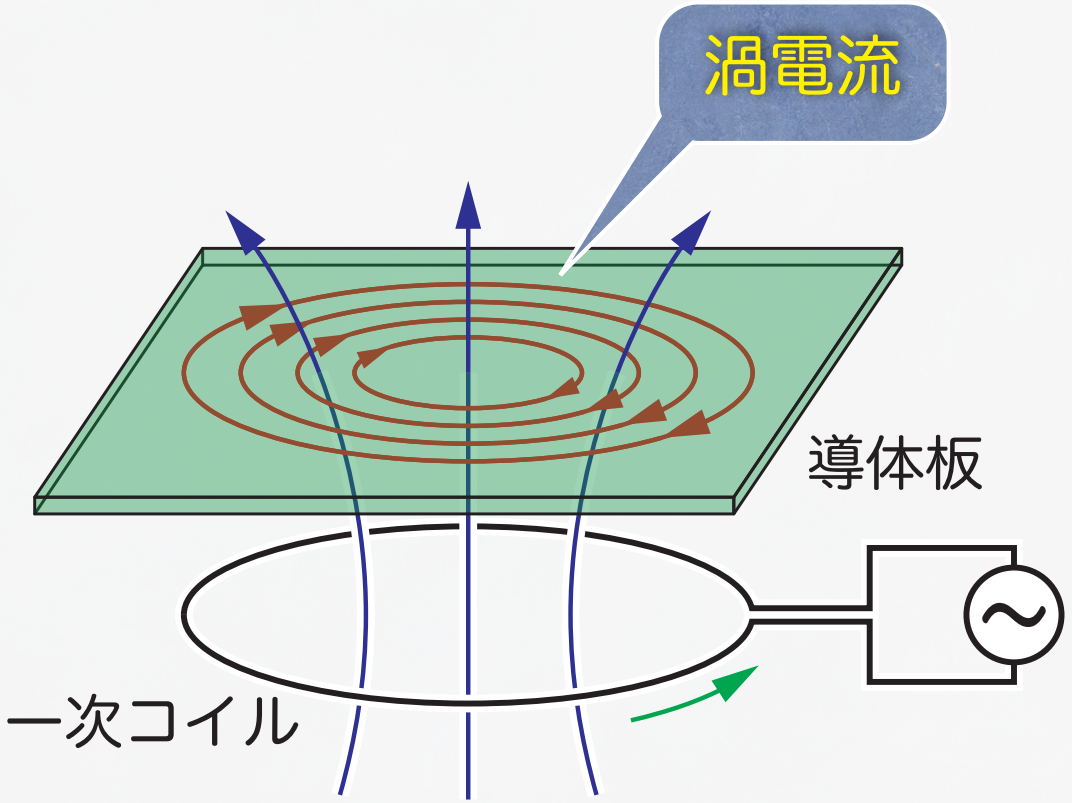
渦電流 (eddy current)



渦電流 (eddy current)



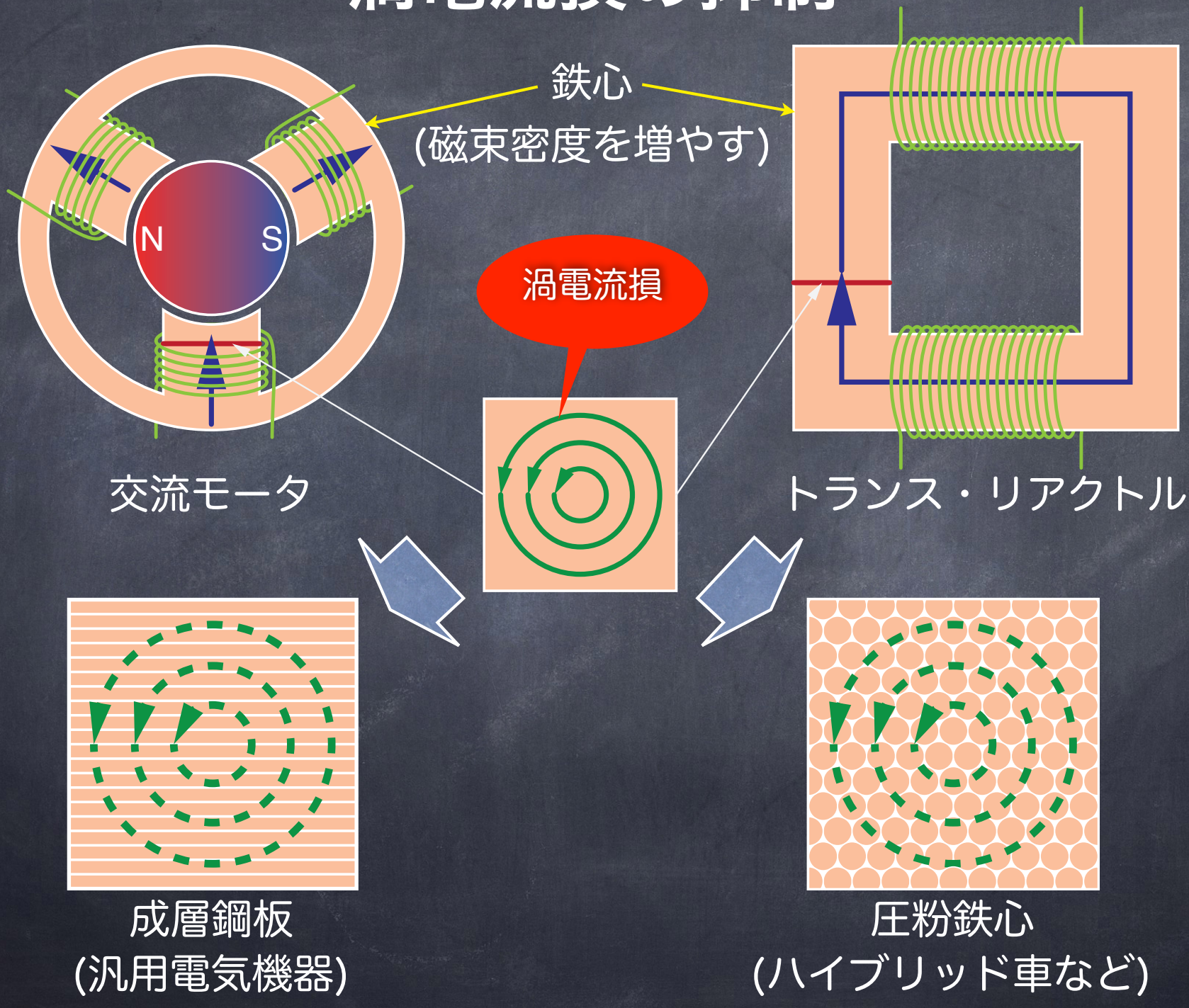
渦電流 (eddy current)



渦電流による発熱(ジュール熱)＝渦電流損

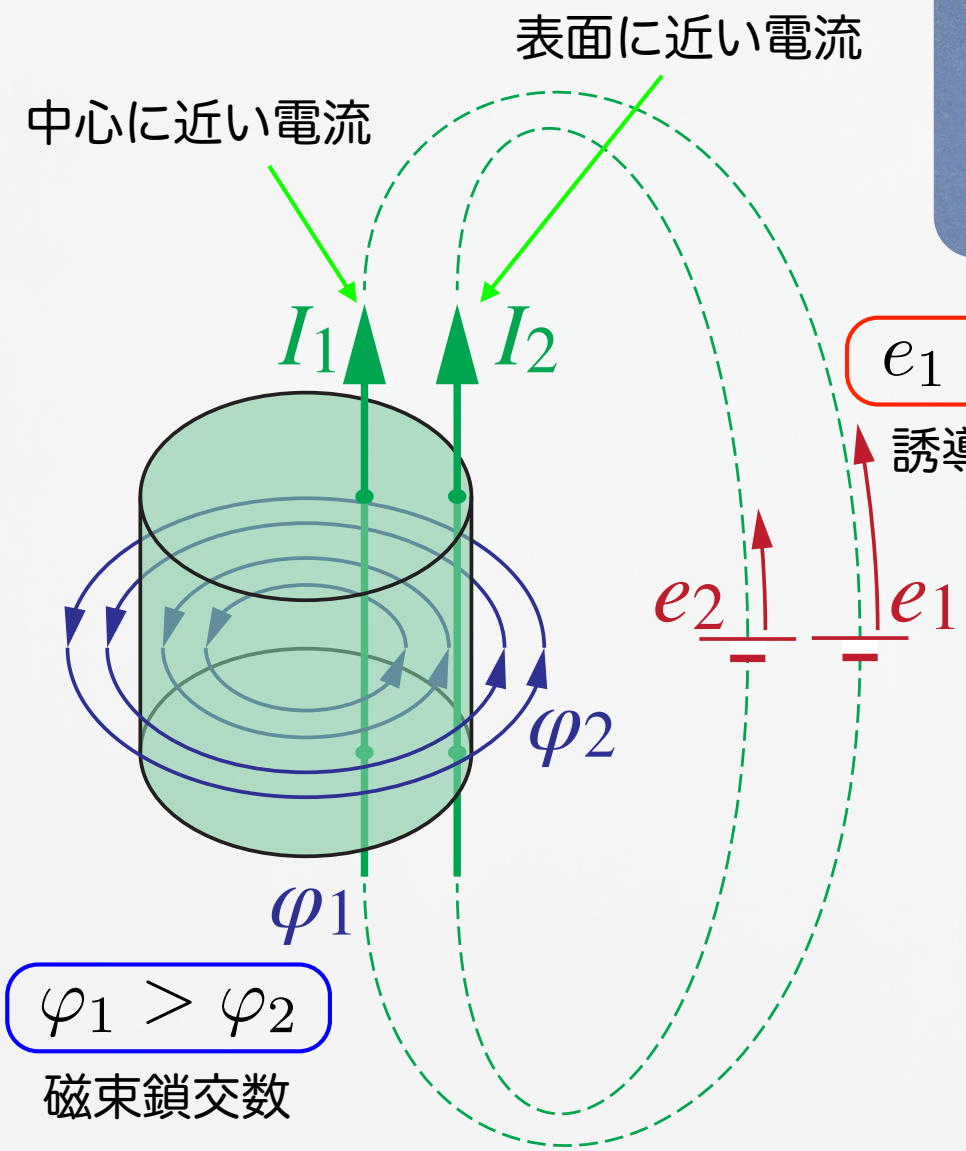
渦電流損の利用例：IH(induction heating)クッキングヒータ

渦電流損の抑制


鉄心
(磁束密度を増やす)
N
S
渦電流損
交流モータ
トランス・リアクトル
成層鋼板
(汎用電気機器)
圧粉鉄心
(ハイブリッド車など)

表皮効果

交流が導線を流れる



中心に近い電流ほど大きな誘導起電力(電流を妨げる力)を受ける
→ 電流が表面に偏って流れる
＝ 表皮効果

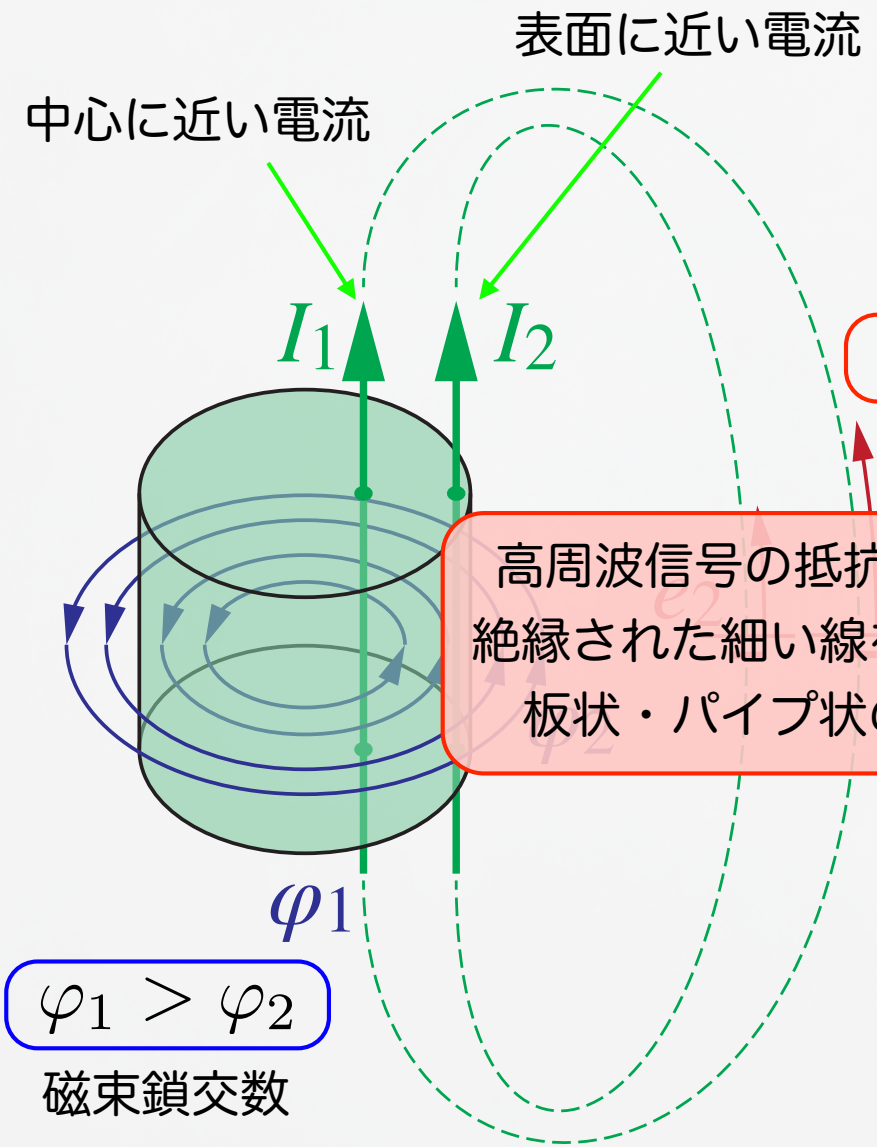
実効的な導線の断面積が減少するため電気抵抗が増加してしまう

銅線の表皮深さ(電流が1/eになる深さ)

周波数	表皮深さ
60 Hz (商用電源)	8.4 mm
600～1600 kHz (AMラジオ)	84～52 μm
500～800 MHz (地デジ)	3～2 μm
1～2 GHz (携帯電話)	2～1.5 μm

表皮効果

交流が導線を流れる



中心に近い電流ほど大きな誘導起電力
(電流を妨げる力)を受ける
→ 電流が表面に偏って流れる
＝ 表皮効果

$e_1 > e_2$
誘導起電力

実効的な導線の断面積が減少する
ため電気抵抗が増加してしまう

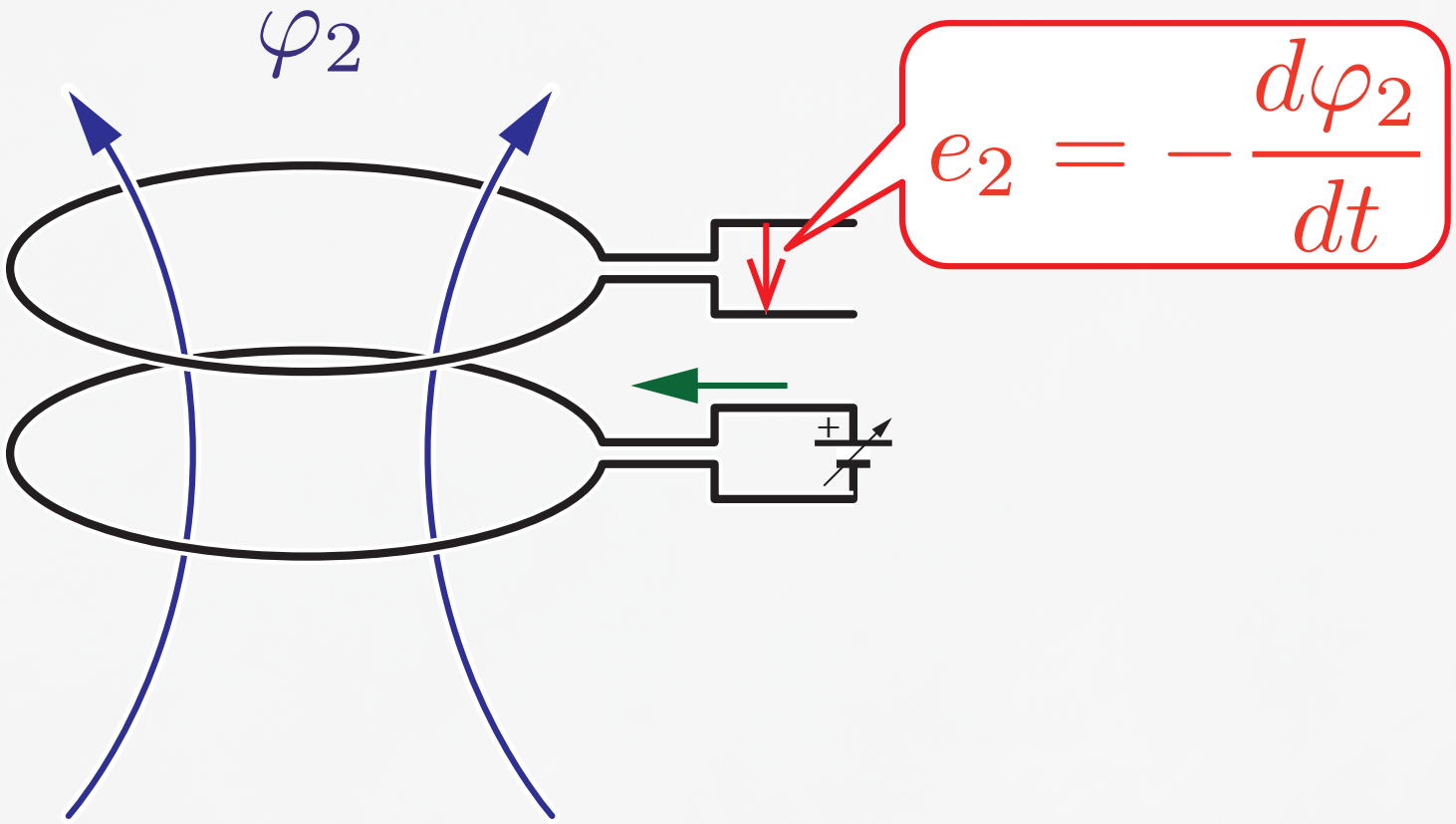
高周波信号の抵抗値を下げるために、
絶縁された細い線を束ねたリッツ線や、
板状・パイプ状の配線が用いられる

(電流が1/eになる深さ)

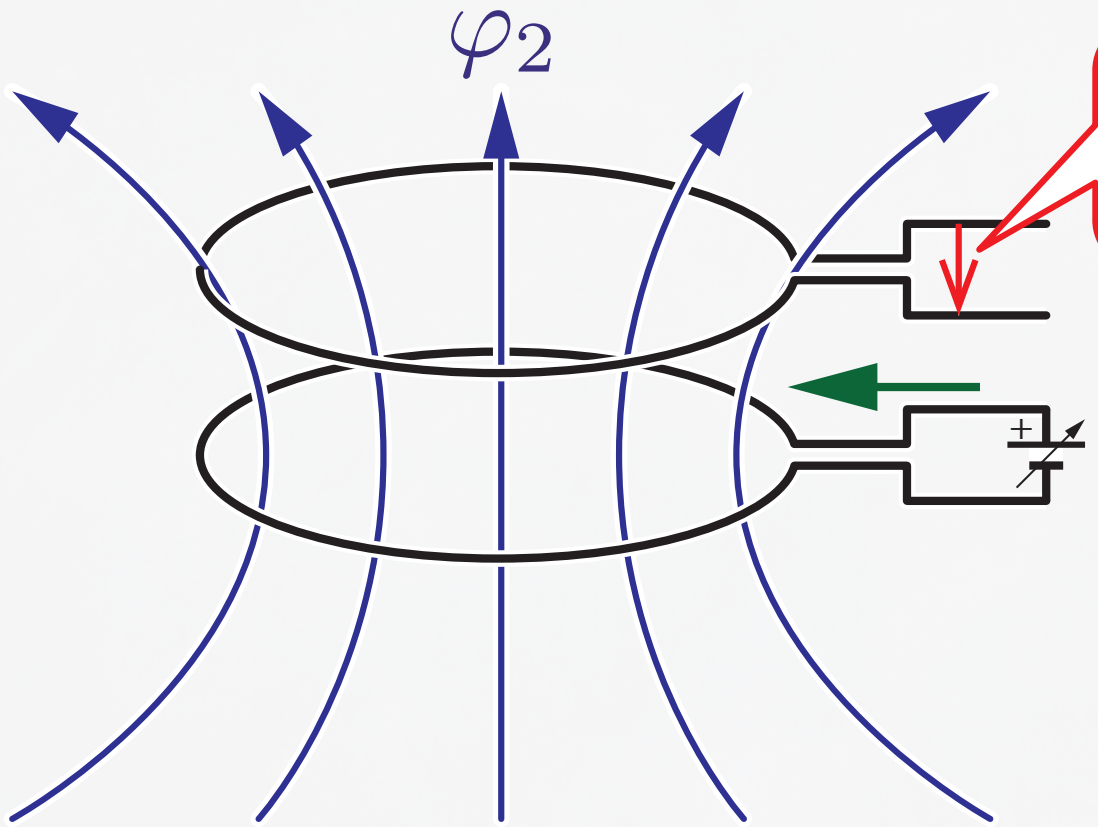
	表皮深さ
60 Hz (商用電源)	8.4 mm
600～1600 kHz (AMラジオ)	84～52 μm
500～800 MHz (地デジ)	3～2 μm
1～2 GHz (携帯電話)	2～1.5 μm

第9章：インダクタンス

自己インダクタンス

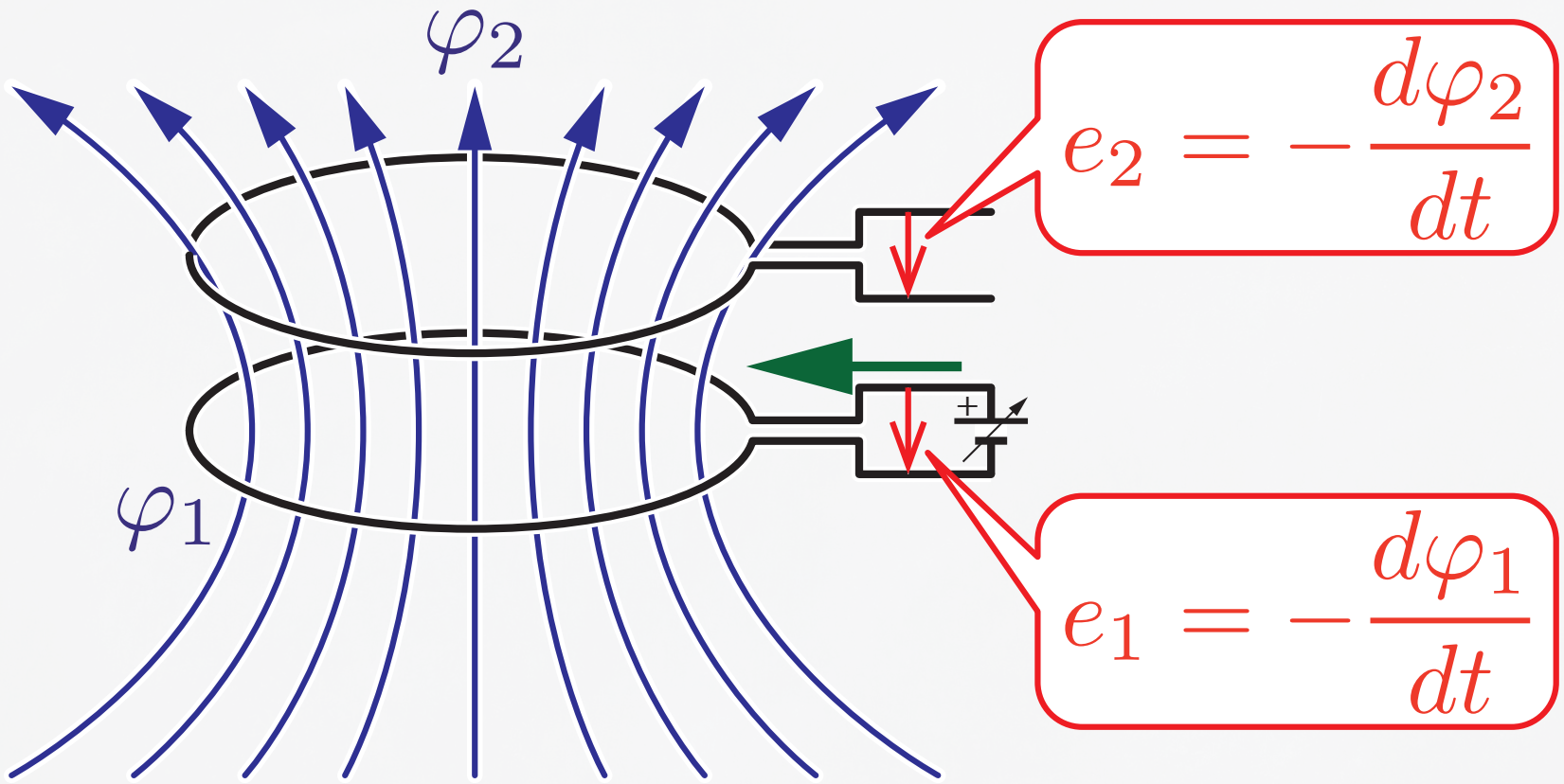


自己インダクタンス



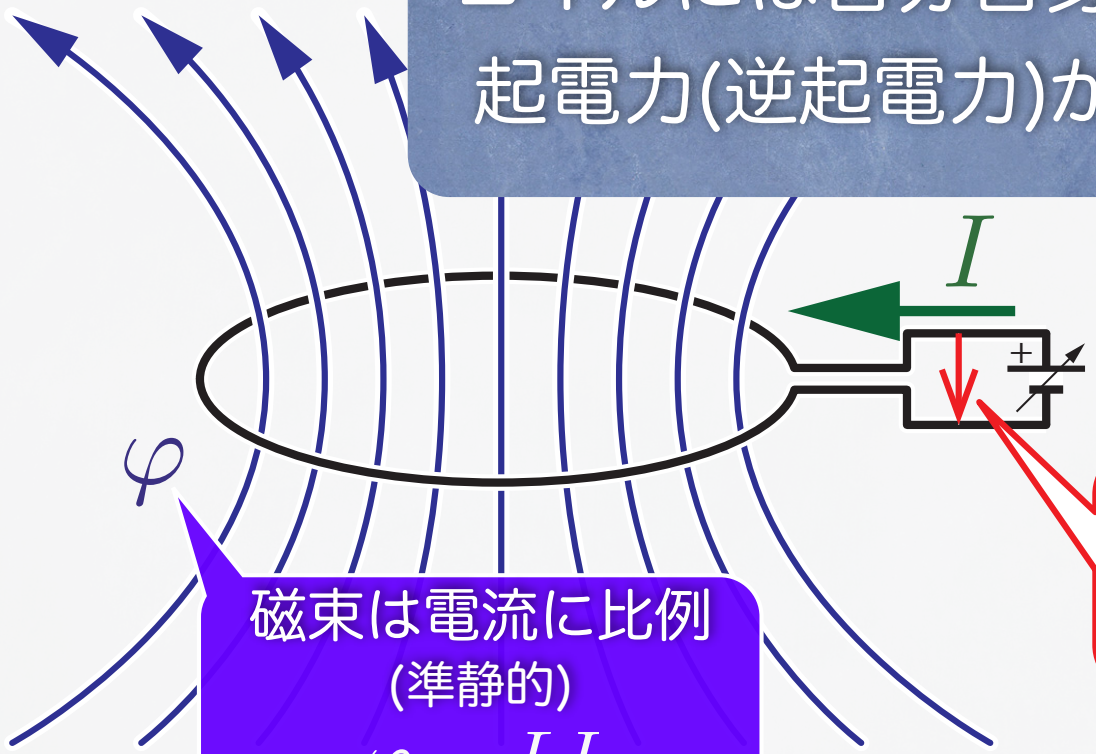
$$e_2 = -\frac{d\varphi_2}{dt}$$

自己インダクタンス



自己インダクタンス

コイルには自分自身の電流変化を妨げる
起電力(逆起電力)が生じる ⇒ 自己誘導

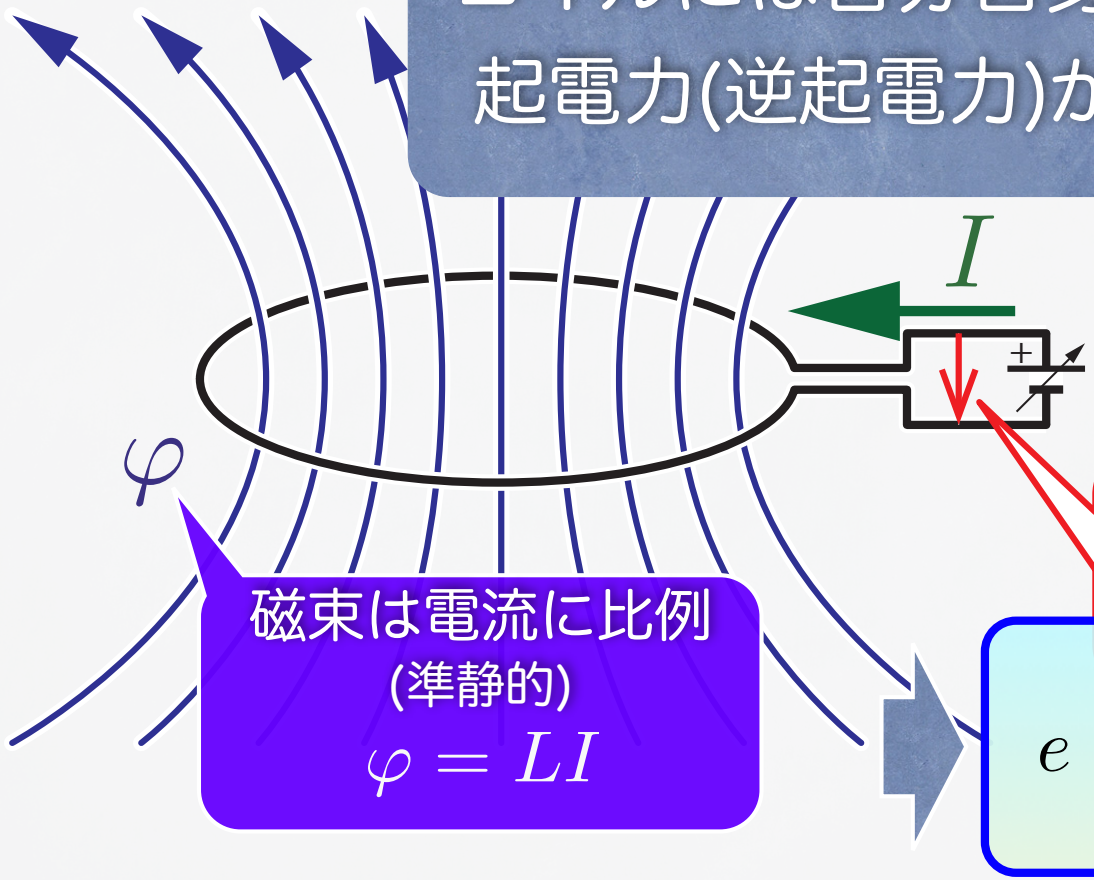


磁束は電流に比例
(準静的)
$\varphi = LI$

$$e = -\frac{d\varphi}{dt}$$

自己インダクタンス

コイルには自分自身の電流変化を妨げる
起電力(逆起電力)が生じる ⇒ 自己誘導



磁束は電流に比例
(準静的)
$\varphi = LI$

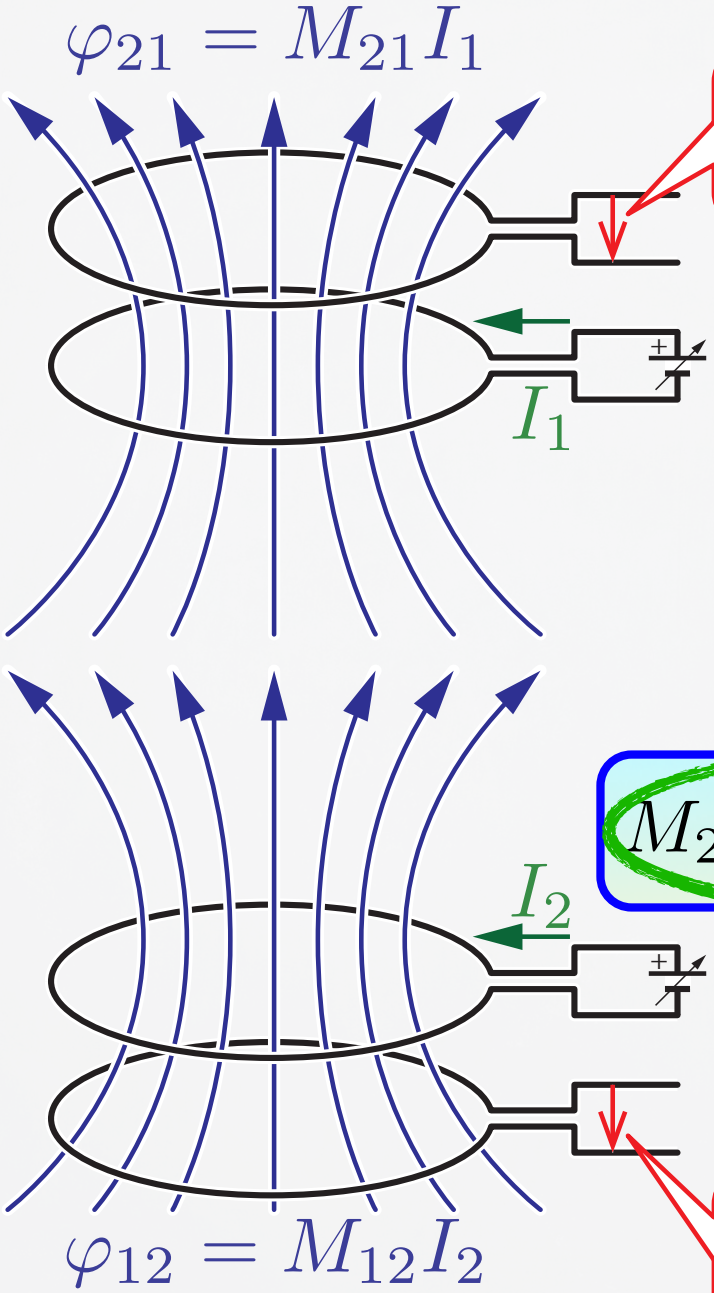
$$e = -\frac{d\varphi}{dt}$$

$$e = -L\frac{dI}{dt}$$

L: 自己インダクタンス、単位 [H] (ヘンリー)
自己インダクタンスは、コイルの形状や材質によって決まる

自己インダクタンスは、電流の速い変化を妨げる
高周波フィルタ(電気回路ではLPFという)として働く

相互インダクタンス



$$e_2 = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

ふたつのコイルがあるとき、一方の電流は他方に誘導起電力(相互誘導起電力)を生じる ⇒ 相互誘導

$M_{21} = M_{12} = M$：相互インダクタンス

相反定理

(Mの単位も [H])

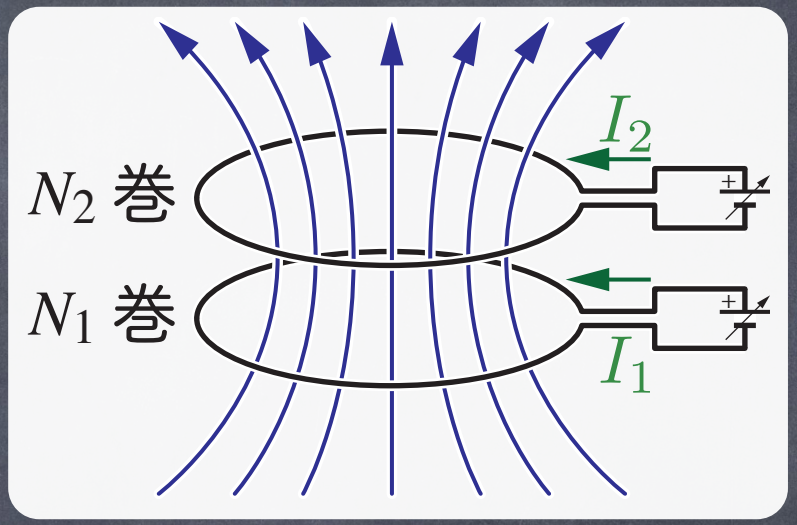
$$e_1 = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

自己インダクタンスと相互インダクタンス

右図のコイルで、

$$\varphi_1 = N_1\Phi_1 = L_1 I_1 \quad \rightarrow \quad L_1 = \frac{N_1\Phi_1}{I_1}$$

$$\varphi_2 = N_2\Phi_2 = L_2 I_2 \quad \rightarrow \quad L_2 = \frac{N_2\Phi_2}{I_2}$$



一方の作る磁束が k $(0 \leqq k \leqq 1)$ の割合で

他方と鎖交する場合、

$$\varphi_{21} = kN_2\Phi_1 = MI_1 \quad \rightarrow \quad M = \frac{kN_2\Phi_1}{I_1}$$

$$\varphi_{12} = kN_1\Phi_2 = MI_2 \quad \rightarrow \quad M = \frac{kN_1\Phi_2}{I_2}$$

$$M^2 = \frac{kN_2\Phi_1}{I_1}\frac{kN_1\Phi_2}{I_2} = k^2\frac{N_1\Phi_1}{I_1}\frac{N_2\Phi_2}{I_2} = k^2 L_1 L_2$$

$$M = \pm k\sqrt{L_1 L_2} \qquad k\text{: 結合係数}$$

(+のときは両コイルの電流が作る磁束が同方向、–のときは逆方向)

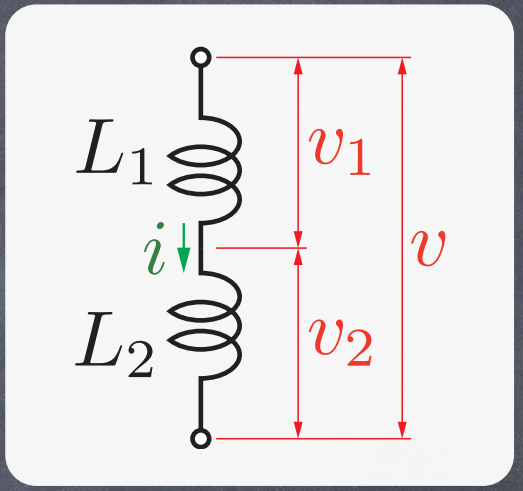
合成インダクタンス(M=0の場合)

直列接続（電流が共通）

$$v_1 = L_1\frac{di}{dt}\ ,\quad v_2 = L_2\frac{di}{dt}\ ,\quad v = L\frac{di}{dt}$$

$$v = v_1 + v_2 = L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} = (L_1 + L_2)\frac{di}{dt}$$

$$L = L_1 + L_2$$

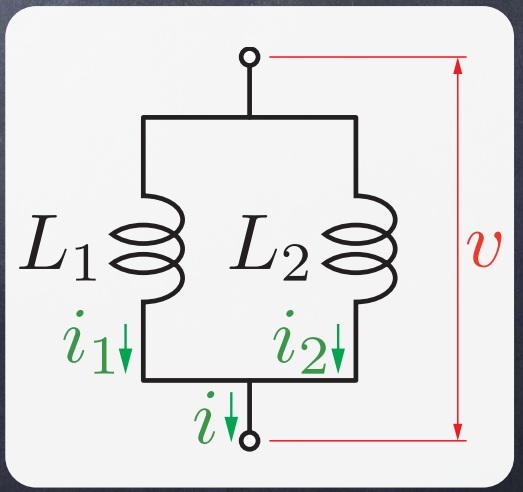


並列接続（電圧が共通）

$$v = L_1\frac{di_1}{dt} = L_2\frac{di_2}{dt}\ ,\quad v = L\frac{di}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{d(i_1 + i_2)}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)v$$

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$



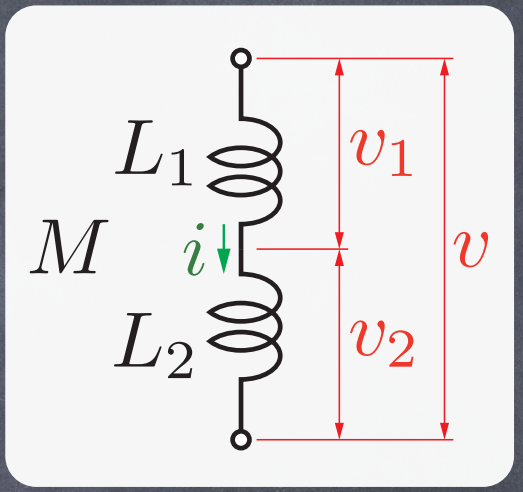
合成インダクタンス($M \neq 0$の場合)

直列接続（電流が共通）

$$v_1 = L_1\frac{dt}{dt} + M\frac{di}{dt}\ ,\quad v_2 = L_2\frac{dt}{dt} + M\frac{di}{dt}\ ,\quad v = L\frac{di}{dt}$$

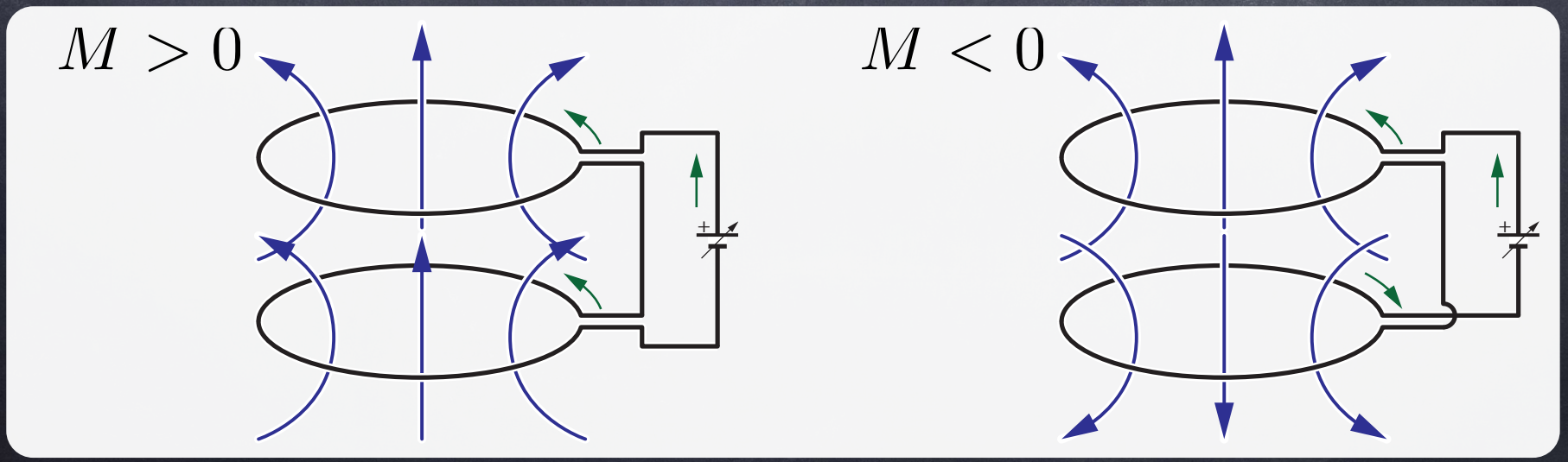
$$v = v_1 + v_2 = L_1\frac{dt}{dt} + L_2\frac{dt}{dt} + 2M\frac{di}{dt}$$

$$= (L_1 + L_2 + 2M)\frac{di}{dt}$$



$$L = L_1 + L_2 + 2M$$

接続方法による相互インダクタンスの正負



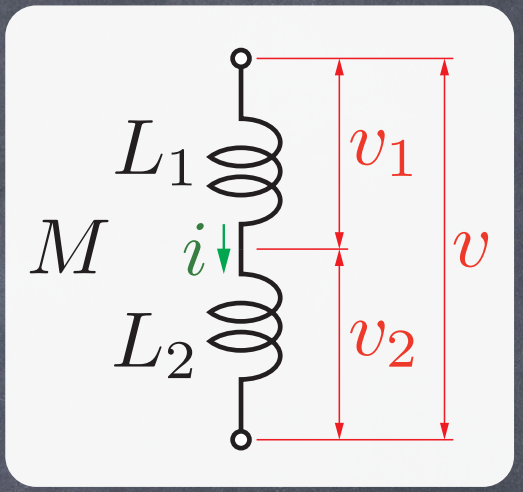
合成インダクタンス($M \neq 0$の場合)

直列接続（電流が共通）

$$v_1 = L_1\frac{di}{dt} + M\frac{di}{dt}, \quad v_2 = L_2\frac{di}{dt} + M\frac{di}{dt}, \quad v = L\frac{di}{dt}$$

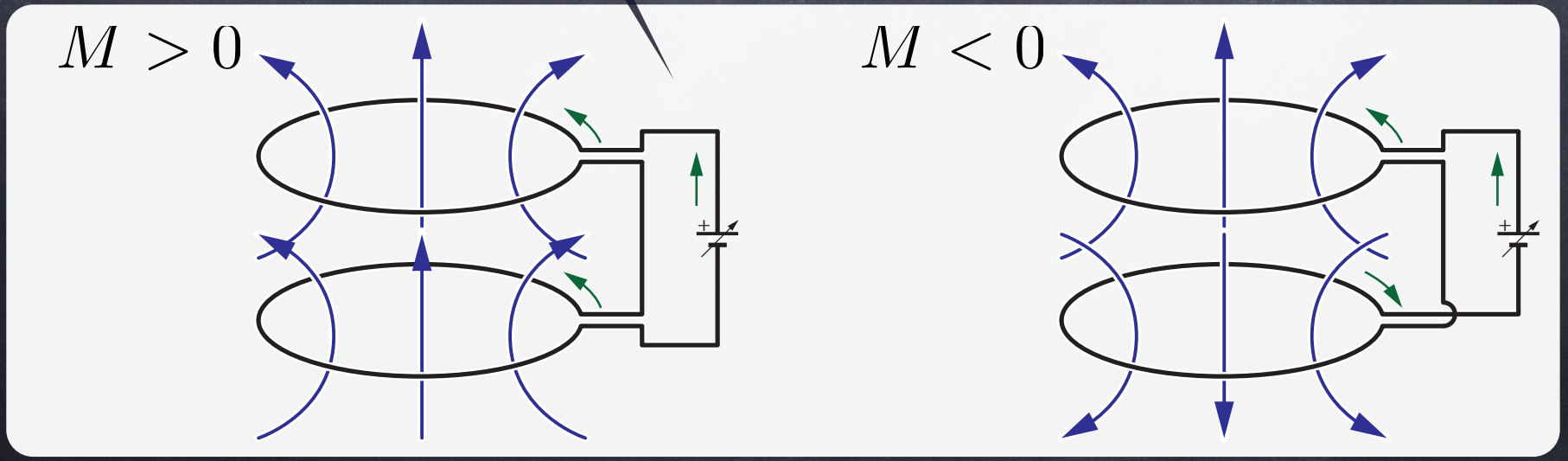
$$= (L_1 + L_2 + 2M)\frac{di}{dt}$$

交流を流したとき、コイルの接続方法によって電流の流れやすさが異なる



$$L = L_1 + L_2 + 2M$$

接続方法による相互インダクタンスの正負



インダクタンスの持つ磁気エネルギー

磁気エネルギー：自己インダクタンスによる逆起電力に抗してコイルに電流を流すために外部から供給した電気エネルギーに等しい

逆起電力：$e = -L\dfrac{di}{dt}$

コイルに加える電圧：$v = -e = L\dfrac{di}{dt}$

dt の時間で電源がする仕事：$dW_m = vi\,dt = Li\,di$

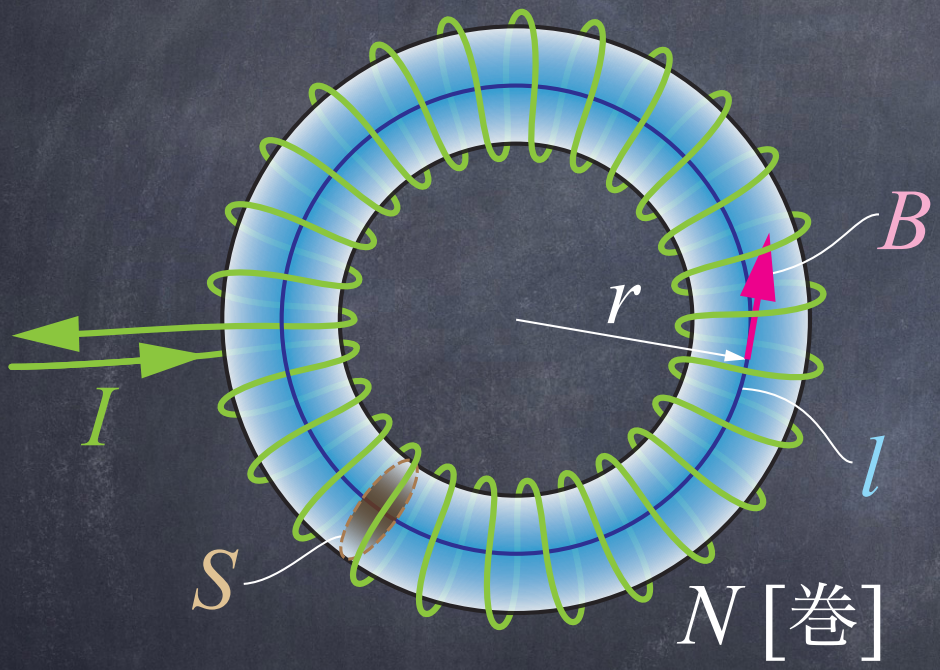
電流を0からIまで増やすためにする仕事(=磁気エネルギー)：

$$W_m = \int_0^I Li\,di = L\left[\frac{1}{2}i^2\right]_0^I = \frac{1}{2}LI^2$$

ソレノイドコイルの自己インダクタンス

$$L = \frac{\varphi}{I} \quad \Rightarrow \quad \text{自己インダクタンスは1A当りの磁束鎖交数}$$

無端環状ソレノイド(*r*がコイルの太さより十分大きいとき)

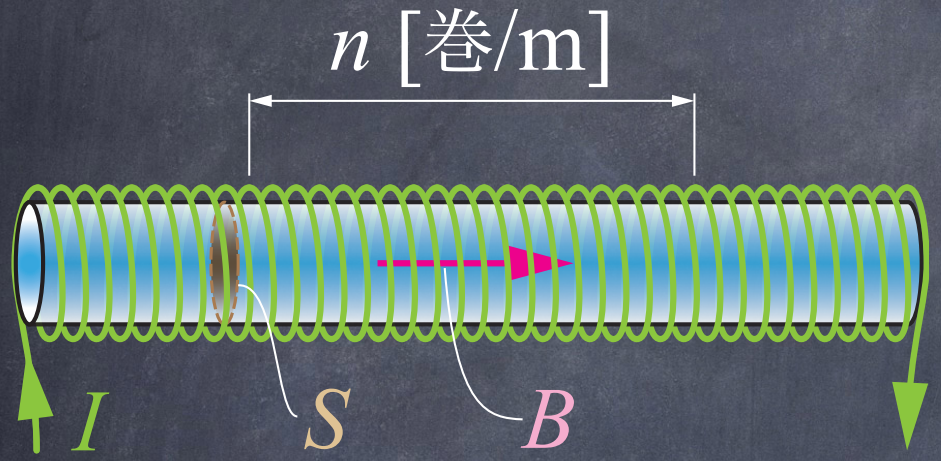


$$B = \frac{\mu_0 N I}{l} \ [\mathrm{T}] \quad (6 \cdot 25)$$

$$L = \frac{\varphi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} \ [\mathrm{H}]$$

ソレノイドコイルの自己インダクタンス

無限長ソレノイド



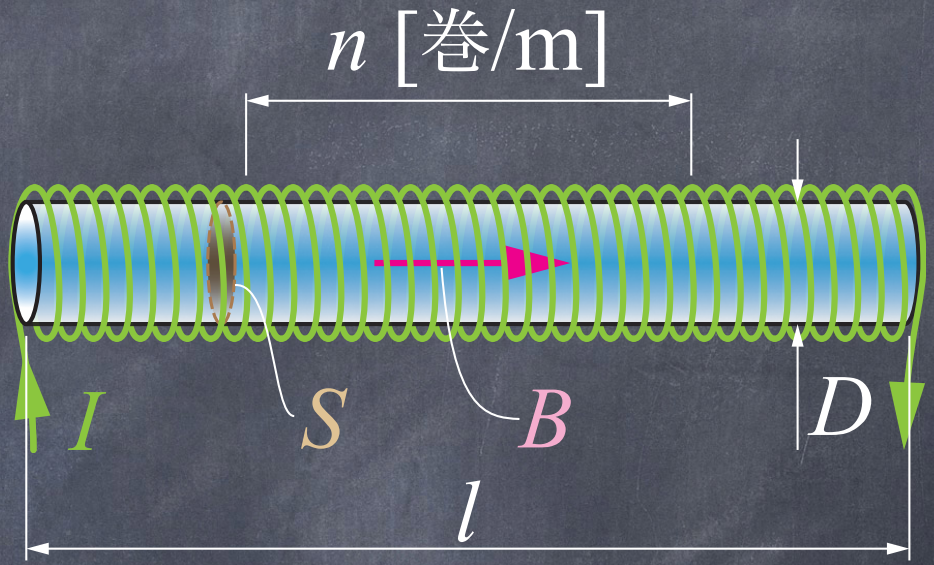
$$B = \mu_0 n I \quad [\mathrm{T}] \quad (6 \cdot 27)$$

$$\varphi = nBS = \mu_0 n^2 S I$$

$$L = \frac{\varphi}{I} = \mu_0 n^2 S \quad [\mathrm{H/m}]$$

(単位長さ当り)

有限長円筒ソレノイド



$$L = K \mu_0 n^2 S l \quad [H]$$

K: D/lで決まる「長岡係数」

$D/l \to 0$ で $K \to 1$

磁性体とインダクタンス

- 物質は、磁気的な性質から以下の三つに分類される
  - **常磁性体**：磁界中で磁界に引きつけられる方向に自分自身がわずかに磁気を帯びる(磁化する)
    アルミニウム、白金、酸素など
  - **反磁性体**： 磁界中で磁界に反発する方向に自分自身がわずかに磁化する
    ビスマス、銅、銀、水など
  - **強磁性体**：磁界中で磁界に引きつけられる方向に自分自身が強く磁化する
    鉄、コバルト、ニッケルなど

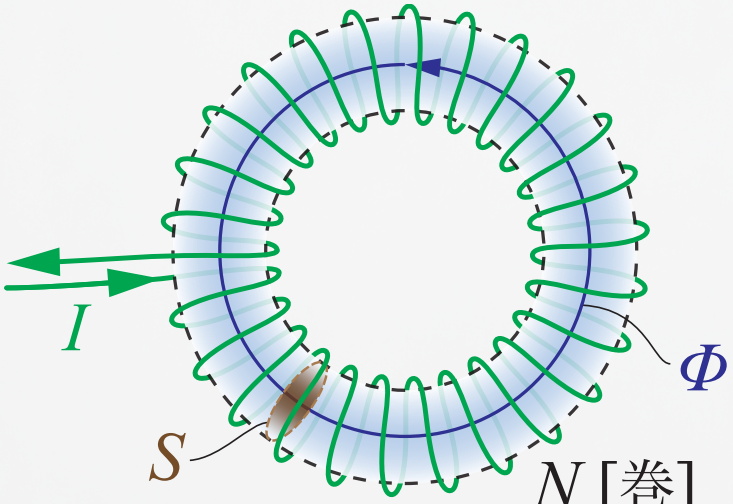
つまり、**全ての物質は磁性体**である。ただし、常磁性体や反磁性体の磁化は非常に弱い(外部磁場の10^{-5}以下)ので、一般的にはこれらを**非磁性体**と呼び、強磁性体のみを**磁性体**と呼ぶことが多い。

磁性体とインダクタンス

強磁性体の中では、外部からの磁束密度と磁化による磁束密度が合算されるため、磁束の量が非常に増える(数百～数千倍)。

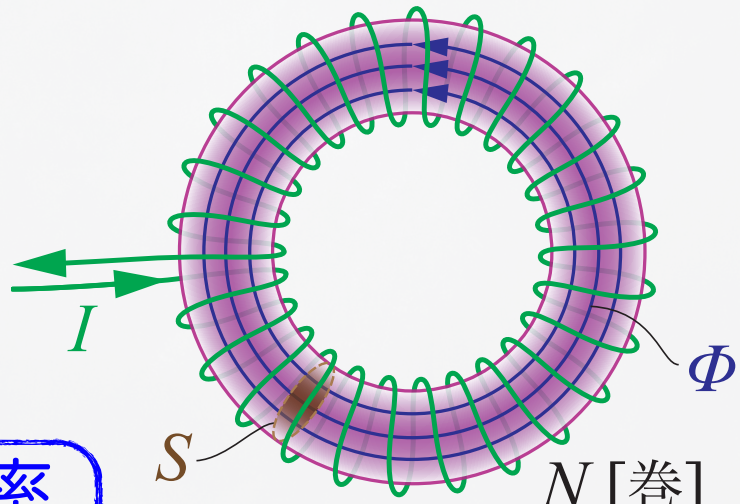
強磁性体をコイル芯にすると、自己インダクタンスを増やせる(この効果を最大限活かすためには、磁性体で磁束の回路(磁路)を形成する必要がある)

空芯環状ソレノイド



$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} \quad [\mathrm{H}]$$

鉄芯環状ソレノイド



比透磁率

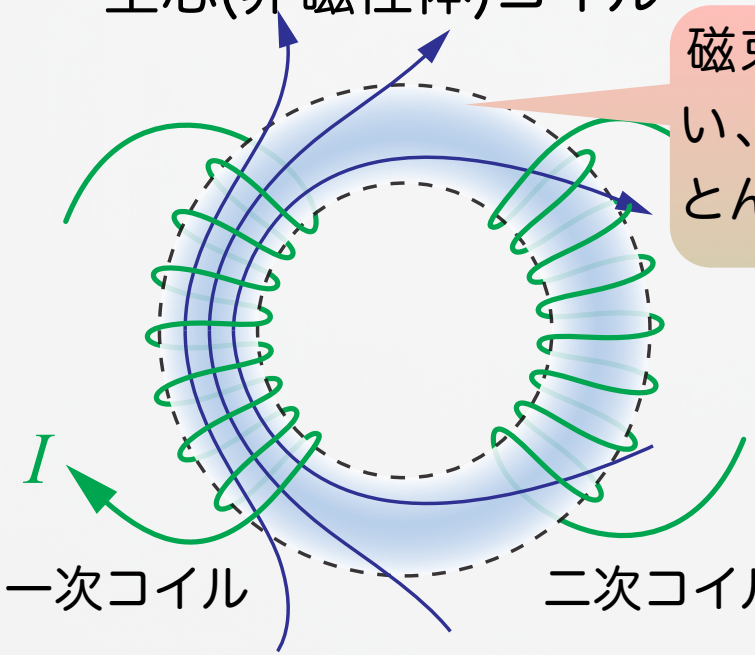
$$L = \frac{\mu_r \mu_0 N^2 S}{l} \quad [\mathrm{H}]$$

磁性体とインダクタンス

強磁性体には、磁束をその中に閉じ込めようとする性質がある

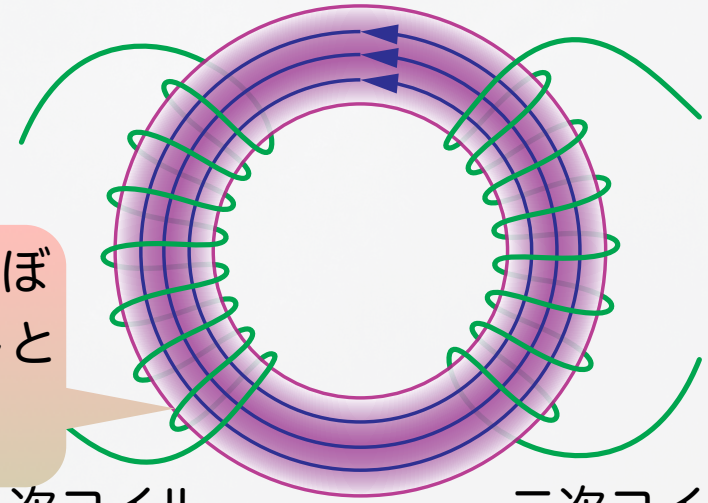
強磁性体で磁束の通路(磁路)を作ることで、相互インダクタンスの結合係数を1(完全結合)に近づけることができる

空芯(非磁性体)コイル



磁束が発散してしまい、二次コイルとほとんど鎖交しない

鉄芯(磁路を持つ)コイル



磁束が漏れず、ほぼ全てが二次コイルと鎖交する