電気磁気学 II：6 章の重要ポイント

1　6 章：真空中の静磁界

1.1　磁界と磁束密度

- **磁界 (磁場)**：磁気的な作用が行われる力の場。方位磁石の N 極は磁界の方向を指す。
- **磁力線**：磁界の方向をつないだ線。N 極から出て S 極に向かう。接線方向が磁界ベクトルの方向。
- **磁束**：磁界の様子を示す指力線 (記号 Φ を用いることが多い)。単位は Wb (ウェーバ)。真空中においては磁束の方向は磁力線の向きと一致。磁束には発生点や消滅点はなく、至る所で連続な環状の線。
- **磁束密度**：磁束に垂直な単位面積当りの磁束の量 (記号 $\boldsymbol{B}$ を用いることが多い)。単位は T (テスラ)=Wb/m^2。磁束密度も方向と大きさを持つベクトル量。一般的には磁場を求めるということは、磁束密度を求めるということ。
- **磁荷**：静電気の電荷に対応する物理量であるが、電荷と異なり仮想的なものである。磁荷は正負 (NS) の対 (双極子=ダイポール) でのみ存在し、単極磁荷 (モノポール) は存在しない。電界は電荷から生じるが、磁界は磁荷ではなく電荷の動き (電流) から生じる。

1.2　磁界に関する各種の法則

- **アンペアの右ネジの法則**：電流を右ネジの進む方向とすると、その電流が作る磁界は右ネジを回す方向になる。また、円形電流を流した場合の中心部の磁界は、電流を右ネジの回転方向としたときに右ネジが進む方向になる。
- **磁束密度に関するガウスの法則**：任意の閉曲面を考えたとき、この閉曲面に出入りする磁束の総和 (磁束密度の閉曲面垂直成分の積分) は常に 0 となる。$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \Delta\Phi_i = \oint_S B_n \, dS = 0 \text{ [Wb]}}$。この法則は単極磁荷 (N 極だけ、S 極だけ) が存在しないことを示している。
- **ビオ・サバールの法則**：電流素片 (微小長さの電流、$I\,ds$) が r だけ離れた位置に作る微小磁束密度の大きさ (dB) は、$\boxed{dB = \dfrac{\mu_0 I \sin\theta}{4\pi r^2} ds \text{ [T]}}$ で与えられる。ここで、μ_0 は真空の透磁率 ($= 4\pi \times 10^{-7}$ [H/m])、θ は電流素片の方向 (ds) と r の方向のなす角である。
  なお、電流全体が作る磁束密度 (B) は dB を電流経路 c に沿って積分したものである。$B = \displaystyle\int_c dB$ [T]
- **アンペアの周回積分の法則**：任意の閉曲線 (c) に対して、磁束密度の接線方向成分を閉曲線に沿って周回積分すると、閉曲線に鎖交する電流の総和 (電流が分布している場合には、c が作る面 (S) に対する電流密度 (J) の垂直成分を S にわたって面積分したもの) と真空の透磁率 (μ_0) の積になる。$\boxed{\displaystyle\oint_c B_s \, ds = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i = \mu_0 \int_S J_n \, dS}$。アンペアの周回積分の法則はビオ・サバールの法則の積分形に相当する。

1.3　単純な形状を持つ電流による磁界

- **無限直線電流**：無限の長さを持つ電流 I [A] から 距離 r [m] 離れた点における磁束密度 の大きさ (B [T]) は、$\boxed{B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \text{ [T]}}$
- **円形電流**：半径 r [m] の円形電流 (I [A]) が、その 中心部に作る磁束密度 の大きさ (B [T]) は、$\boxed{B = \dfrac{\mu_0 I}{2r} \text{ [T]}}$。円形電流が N 回巻のときは、電流値を N 倍する。

※ 複数の電流がある場合の磁束密度は、それぞれの電流が作る磁束密度の方向と大きさを考慮して足し算 (ベクトル和) を行うことで求める。

1.4　ソレノイドコイルが作る磁界

- **(無端) 環状ソレノイド：**環状ソレノイドの内径を a [m]、外径を b [m]、巻数を N [回] とし、ソレノイドコイルに流す電流を I とすると、中心から r $(a < r < b)$ 離れた位置の磁束密度の大きさ (B [T]) は、$\boxed{B = \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi r}\ [\mathrm{T}]}$。なお、$r \leq a$、$r \geq b$ の条件のときは $B = 0$ [T] である (ソレノイドコイルの外部の磁束密度は常に 0)。また、コイル径 $(b - a)$ が b に対して十分小さいときはコイル内部の磁束密度は一定と見なすことができ、コイル中心の半径 $R = (a + b)/2$(またはコイル中心の円周長 $l = 2\pi R$) を用いて $\boxed{B = \dfrac{\mu_0 NI}{2\pi R} = \dfrac{\mu_0 NI}{l}\ [\mathrm{T}]}$ と表すことができる。
- **無限長 (直線) ソレノイド：**単位長さ当りの巻数 n [回/m] の無限長ソレノイドに電流 (I [A]) を流したとき、コイル内部の磁束密度の大きさ (B [T]) は場所に依らず一定で、$\boxed{B = \mu_0 nI\ [\mathrm{T}]}$。また、コイルの外部の磁束密度は常に 0 である。これは十分小さなコイル径の環状ソレノイドで円周長当りの巻数を $n = N/l$ とした場合と一致する。

1.5　ローレンツ力と電磁力

- **運動する電荷が磁界から受ける力：**電荷 q [C] が磁束密度 B [T] の中を速度 v [m/s] で移動するとき、電荷が受ける力 (F [N]) の大きさは、$\boxed{F = qvB\sin\theta\ [\mathrm{N}]}$。ここで θ は速度 v と磁束密度 B のなす角である。また、力の方向は**フレミングの左手の法則** (中指：正電荷の進行方向、人差指：磁束密度、親指：力) で定まる。均一な磁場 (B が一定) に垂直 ($\theta = 90°$) で等速 (v が一定) 運動する電荷は、円軌道を描く。
- **電流が磁界から受ける力：**直線電流 (I [A]) が流れる電線を磁束密度 B [T] の中に置いたとき、単位長さ (=1m) の電線に働く力 (f [N/m]) の大きさは、$\boxed{f = IB\sin\theta\ [\mathrm{N/m}]}$。ここで θ は電流 I と磁束密度 B のなす角である。また、力の方向は**フレミングの左手の法則** (中指：電流、人差指：磁束密度、親指：力) で定まる。
- **平行電流間に働く力：**2 本の平行電流 (I_1、I_2 [A]) が距離 d [m] 離れているとき、単位長さ (=1m) の電線に働く力 (f [N/m]) の大きさは、$\boxed{f = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\ [\mathrm{N/m}]}$。このとき、力の方向は、$I_1$ と I_2 が同方向のとき引力、逆方向のとき斥力となる。この力は作用・反作用の法則に従っており、互いに相手に力を与え合っていることに注意する。
- **磁場中のコイルに働くトルク (回転モーメント)：**磁束密度 B [T] 中に置かれたコイル (ループ面積 S [m^2]、巻数 N [回]、電流 I [A]) が受けるトルク ([回転モーメント]=[支点-作用点間の距離] × [回転方向の力]、T [N·m]) の大きさは、$\boxed{T = NISB\sin\theta\ [\mathrm{N{\cdot}m}]}$。ここで θ はコイル面の法線方向と磁束密度 B のなす角である。
- **磁界におけるマクスウェルの応力：**磁場の歪みによって磁場内に生じている力。この力を電磁力として考えることができ、磁力線がゴム紐のように作用すると捉えることができる。

2　その他の注意点

- このプリントは要点だけをまとめたものであり、問題を解く際に最低限知っておくべき公式や法則のみが書かれている。実際の問題を解くには、これらの式や法則を活用する能力が求められる。プリント演習問題、教科書の例題・章末問題を復習して、応用力を養っておくこと。
- 教科書や授業で用いている物理量の単位は全て SI 単位系 (長さ：m、重さ：kg、時間：s、電流：A ...) である。単位も含めて覚えておくこと。また、計算問題に際しては、単位を SI 単位系に変換するのを忘れないこと。
- 本資料およびプリント演習問題・教科書章末問題の解答例を以下からダウンロードできるので、適宜参考とすること。

http://www.surf.nuqe.nagoya-u.ac.jp/members/nakahara/EM2_summary1.pdf

電気磁気学 II 演習 1

学籍番号： 学籍番号　氏名： 氏名　評価： A/B/C

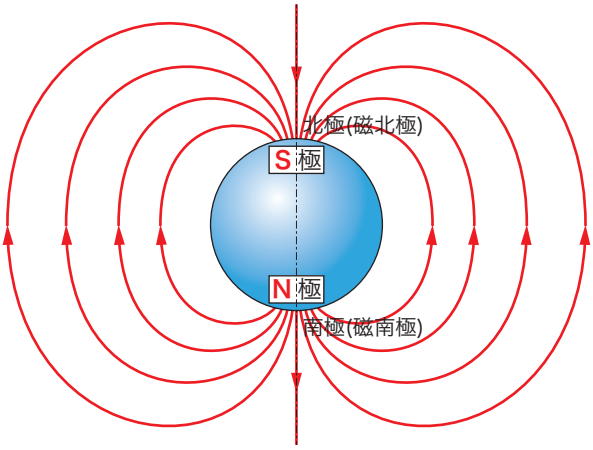
1-1

以下の文中の【】内の選択肢 (a)〜(e) から適切なものを選び、また、□内には適切な語句を入れよ。

- 電界 (電場) は正電荷または負電荷の 【(a) 存在 (b) 動き】[1] が発生源であるのに対し、磁界 (磁場) は 電荷の 【(a) 存在 (b) 動き】[2]、すなわち 電流 が発生源である。
- 電流によって生じる磁界の向きは、【(a) 左 (b) 右 (c) 上 (d) 下】[3] ネジの法則に従い、紙面下向き (⊗) の場合には、【(a) 時計 (b) 反時計】[4] 回りの方向となる。
- 磁場を定量的に表現する方法の一つに磁束密度ベクトルがある。磁束密度ベクトルの大きさは単位面積当たりの磁束の本数であり、単位は 【(a) A/m (b) V/m (c) Wb (d) T】[5] である。また、真空中における磁束密度ベクトルの方向は、磁界の方向と 【(a) 平行 (b) 反平行 (c) 垂直】[6] である。

1-2

地球は大きな棒磁石と考えることができる。図の□中に N 極か S 極かを記入し、地球の外側の部分に磁力線を描け (方向もわかるように描くこと)。なお、磁北極は自転軸から定る北極から 7° 程度ずれており、現在もその位置は変動している。



1-3

磁束密度に関するガウスの法則を表す式を書き、式中の記号の意味とともに、式が意味するところを説明せよ。

磁束密度に関するガウスの法則は、

$$\oint_S B_n \, dS = 0$$

と書くことができる。ここで S は任意の閉曲面、B_n は磁束密度の S 垂直成分である。

この式は、任意の閉曲面に出入りする磁束の総和が 0 であること、すなわち磁束が発生点や消滅点を持たない (N 極だけあるいは S 極だけの単極子が存在しない) ことを意味している。

電気磁気学 II 演習 2

学籍番号： 学籍番号　　氏名： 氏名　　評価： A/B/C

2-1

電流素片 $I\Delta s$ [A·m] から角度 θ の方向で距離 r [m] 離れた点における磁束密度 ΔB を表す式をかけ。また、この式で表される法則をなんというか。

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I \Delta s \sin\theta}{4\pi r^2} \text{ [T]}$$　　ビオ-サバールの法則

2-2

一片が a [m] で N 回巻きの正方形コイルに電流 I [A] を流したときのコイル中心における磁束密度 B を求めよ。

ビオ-サバールの法則を用いると、1 辺がコイル中心に作る磁束密度 B_1 は、

$$B_1 = \frac{\mu_0 IN}{4\pi\, a/2}\int_{-pi/4}^{\pi/4}\cos\phi\, d\phi = \frac{\mu_0 IN}{2\pi\, a}\Big[\sin\phi\Big]_{-pi/4}^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}\mu_0 IN}{2\pi\, a} \text{ [T]}$$

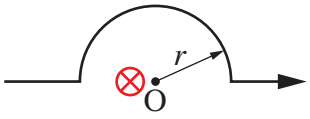
よって、4 辺が作る磁束密度は、

$$B = 4B_1 = \boxed{\frac{2\sqrt{2}\mu_0 IN}{\pi\, a} \text{ [T]}}$$

2-3

下図のような、半径 r [m] の半円と直線からなる導線に電流 I [A] を流したとき、O 点における磁束密度 B を求め、その方向を図中に描け。

直線部は O 点と同一線上にあるので、O 点に磁場は作らない。よって、
半円部のみが B に関与し、その値はビオ-サバールの法則から



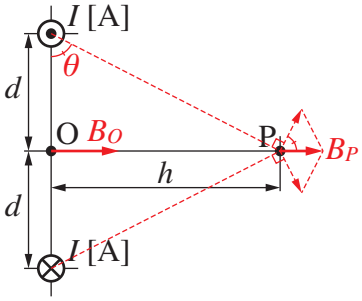
$$B = \int_0^{\pi r}\frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\,ds = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\Big[s\Big]_0^{\pi r} = \boxed{\frac{\mu_0 I}{4r} \text{ [T]}}$$

方向は紙面下向き (⊗)。

裏面へ続く

2-4

下図のように、間隔 $2d$ [m] で配置された無限に長い平行電線に往復電流 I [A] を流したとき、(1) O 点における磁束密度 B_O 及び、(2) O 点から h [m] 離れた P 点における磁束密度 B_P を求め、それぞれの方向を図中に描け。



(1) 往復の電流がそれぞれ O 点に作る磁場の向きはともに右向きで、大きさは $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi d}$。よって、

$$B_O = 2 \times \frac{\mu_0 I}{2\pi d} = \boxed{\frac{\mu_0 I}{\pi d}\ [\mathrm{T}]}$$

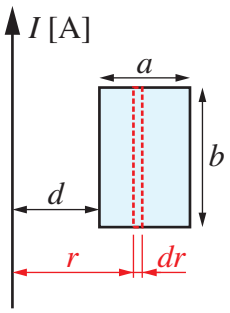
(2) 図のように角度 θ を定めると、往復の電流がそれぞれ P 点に作る磁場の向きは右上及び右下方向で、大きさは $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{d^2+h^2}}$。よって、両者のベクトル和をとると、

$$B_P = 2 \times \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{d^2+h^2}} \cos\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi\sqrt{d^2+h^2}} \frac{d}{\sqrt{d^2+h^2}}$$

$$= \boxed{\frac{\mu_0 I d}{\pi(d^2+h^2)}\ [\mathrm{T}]}$$

2-5

図のように、無限長の直線電流 (I [A]) から d [m] 離れた $a \times b$ [m^2] の長方形領域を貫く磁束を求めよ。



図中の点線枠のように、電流から r 離れ、微小幅 dr、長さ b の領域を考える。この領域における磁束密度は $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ であるので、この領域を貫く磁束は、

$$d\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \times b\, dr = \frac{\mu_0 I b}{2\pi r}\, dr\ [\mathrm{Wb}]$$

これを $r = d$ から $d + a$ まで積分すれば良いので、

$$\Phi = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I b}{2\pi r}\, dr = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int_d^{d+a} \frac{1}{r}\, dr = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \Big[\ln r\Big]_d^{d+a}$$

$$= \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \{\ln(d+a) - \ln(d)\} = \boxed{\frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\frac{d+a}{d}\ [\mathrm{Wb}]}$$

電気磁気学 II 演習 3

学籍番号： 学籍番号　　氏名： 氏名　　評価： A/B/C

3-1

電流密度 J [A/m^2] の電流が存在しているとして、アンペアの周回積分の式を書け。なお、周回積分の経路は c とし、c が作る面を S とする。

$$\oint_c B_s \, ds = \mu_0 \int_S J_n \, dS$$

ただし、B_s は磁束密度の経路接線成分、J_n は電流密度の面垂直成分。

3-2

外径が b [m]、内径が a [m] の中空直線導体に電流 I [A] が一様に流れている。(1) 中空部 ($r < a$)、(2) 導体部 ($a \leqq r \leqq b$)、(3) 導体外部 ($r > b$) の位置 (r) における磁束密度 (B) の大きさをそれぞれ求め、$r - B$ グラフの概形を描け。なお、中空部は真空として扱って良い。

(1) $r < a$ の領域で半径 r の閉曲線を考えると、この閉曲線を通過する電流は 0 であるので、アンペアの周回積分の法則から、

$$\oint_c B(r) ds = 2\pi r B(r) = 0 \quad \text{すなわち、} B(r) = \boxed{0 \text{ [T]}}$$

となる。

(2) $a \leqq r \leqq b$ で半径 r の閉曲線を考える。このとき、中空電線中の電流密度を J とすると、

$$\oint_c B(r) ds = 2\pi r B(r) = \mu_0 \pi (r^2 - a^2) J \quad \text{すなわち、} B(r) = \frac{\mu_0 (r^2 - a^2) J}{2r}$$

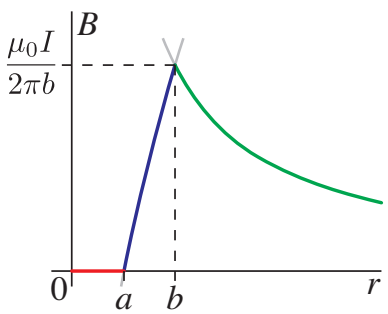
ここで電流密度は $J = \dfrac{I}{\pi(b^2 - a^2)}$ であることを考慮すると、

$$B(r) = \boxed{\frac{\mu_0 I (r^2 - a^2)}{2\pi r (b^2 - a^2)} \text{ [T]}}$$

(3) $b < r$ の領域で半径 r の閉曲線を考えると、この閉曲線を通過する電流は I であるので、

$$\oint_c B(r) ds = 2\pi r B(r) = \mu_0 I \quad \text{すなわち、} B(r) = \boxed{\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \text{ [T]}}$$

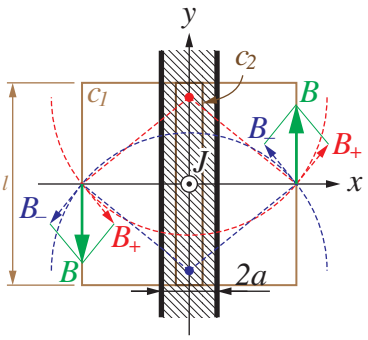
(1)〜(3) の結果をグラフで示すと右図のようになる。



裏面へ続く

3-3

下図のように、x 軸方向の厚さが $2a$ で y 軸方向と z 軸方向には無限に広い平板導体に、電流密度 J [A/m^2] の電流が z 軸正方向に流れている。板の中心を座標原点としたときの磁束密度を求め、$x-B$ グラフに描け。ただし、B は y 方向を正とする。



x 軸に対して対象な 2 点を流れる電流が x 軸上に作る磁束密度を考えると図のように B_+ と B_- の方向となり、そのベクトル合成は $x>0$ では y 軸正方向、$x<0$ では y 軸負方向となる。ここで $|x|>a$ の領域を考えて、y 軸方向の長さ l の矩形の経路 c_1 を図のように取ると、c_1 と鎖交する電流は、$2alJ$。また、磁束密度は常に y 平行であるので、経路を反時計回りに周回積分すると、

$$\oint_{c_1} B_s\,ds = 2lB = 2\mu_0 alJ \qquad \text{すなわち } B=\mu_0 aJ$$

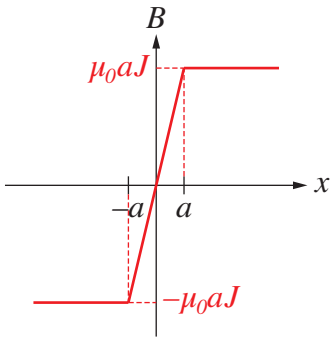
次に $|x|\leqq a$ を考えて図の経路 c_2 を取ると、c_1 と鎖交する電流は、$2xlJ$。よって、経路を反時計回りに周回積分すると、

$$\oint_{c_1} B_s\,ds = 2lB = 2\mu_0 xlJ \qquad \text{すなわち } B=\mu_0 xJ$$

以上をまとめると、

$$\begin{cases} B=-\mu_0 aJ\ [\mathrm{T}] & (x<-a) \\ B=\mu_0 xJ\ [\mathrm{T}] & (|x|\leqq a) \\ B=\mu_0 aJ\ [\mathrm{T}] & (x>a) \end{cases}$$

となり、$x-B$ グラフは右図のようになる。



電気磁気学 II 演習 4

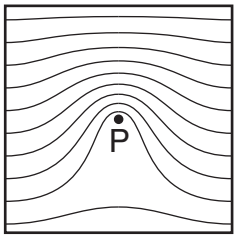
学籍番号： 学籍番号　氏名： 氏名　評価： A/B/C

4-1

以下の文中の□内に適切な語句あるいは式を記入せよ。

(1) 磁束密度 B [T] の中で角度 θ をなす直線導体に電流 I [A] が流れるとき、導体の単位長さあたりに働く力は $f=$ $IB\sin\theta$ [N/m] であり、その方向は フレミング の 左 手の法則で定まる。この法則において親指、人差し指、中指はそれぞれ 力 、 磁界 、 電流 の方向を表す。

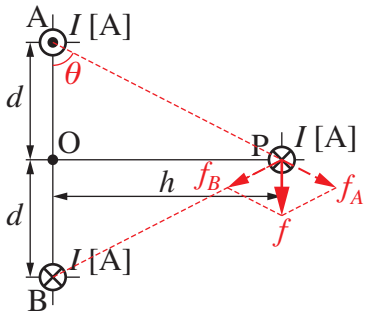
(2) 電磁力は磁場 (磁力線) の歪みを元に戻そうとする力として考えることもできる。このような作用を マクスウェル の応力という。この考え方を用いると、右図のような磁場 (磁力線) ができているときに P 点の電線に働く力の方向は ↓ (下) 向きとなる。



4-2

下図のように 1 対の往復直線電流 I [A] が $2d$ [m] の距離だけ離れた A 点と B 点に流れている。往復電流の中点 O から h [m] 離れた P 点に紙面下向き (⊗) で I [A] の直線電流を流したとき、P 点の電流の単位長さ当たりに働く力の大きさ f を求め、その向きを図に描け。

並行電流には引力、反並行の場合は斥力が働き、AP 間および BP 間の距離は等しいので、その大きさも等しい。したがって、P 点の電流が A 点の電流から受ける力 f_A および B 点の電流から受ける力 f_B は図のようになり、これらの合力は下向きとなる。また、f_A および f_B の大きさは、



$$f_A = f_B = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi\sqrt{d^2+h^2}}$$

ここで θ を図のように定義すると、合力 f は、

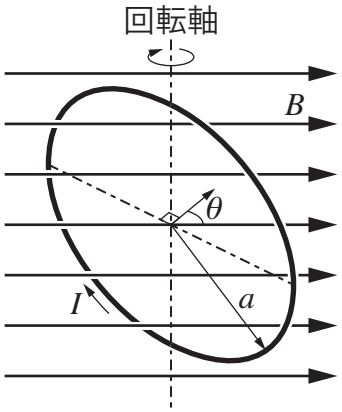
$$f = 2f_A\cos\theta = 2\frac{\mu_0 I^2}{2\pi\sqrt{d^2+h^2}}\frac{d}{\sqrt{d^2+h^2}}$$

$$= \boxed{\frac{\mu_0 I^2 d}{\pi(d^2+h^2)}\ [\mathrm{N/m}]}$$

裏面へ続く

4-3

図のように、半径 a [m] で N 回巻きの円形コイルが磁束密度 B [T] の空間に置かれており、コイルは磁界に垂直な回転軸に対して自由に回転できるようになっている。コイルに I [A] の電流が流れているとし、コイル面の法線方向と B のなす角が θ のときに、コイルが受けるトルクの大きさ T を求めよ。



1 回巻きのコイルの受けるトルクは、コイル断面積 S のとき $ISB\sin\theta$ であるから、

$$T = NISB\sin\theta = \boxed{\pi a^2 NIB\sin\theta \ [\mathrm{N\cdot m}]}$$

4-4

図のように、d [m] 離れた二枚の平行平板に電圧 V [V] を印可し、また、紙面垂直下向き ($\otimes$) に磁束密度 B [T] を加える。さらに、電子 (電荷 $-e$ [C]、質量 m [kg]) を図のように右向きの速度 v [m/s] で入射させる。電界および磁界は斜線の領域にのみ均一に存在するとして、以下の問いに答えよ。

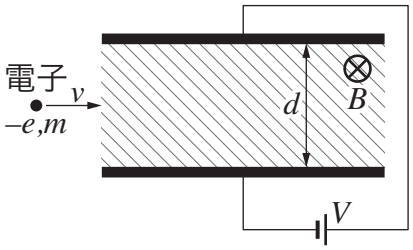
(1) 電子が右向きに進行しているとき、斜線の領域で、電子が電界から受ける力 F_e および磁界から受ける力 F_m の大きさおよび向きを答えよ。

(2) 電子が斜線の領域で右向きに等速直線運動するときの電子の速度 v を求めよ。

(3) 電圧 $V = 0$ のとき斜線の領域で電子は円運動を行う。このときの軌道半径 r を求めよ。

(1) 斜線の領域における電界の大きさ $E = V/d$、また、電界から電子が受ける力の大きさは eE であるので、

$$\boxed{F_e = \frac{eV}{d} \ [\mathrm{N}] \text{ で上向き } (\uparrow)}$$



v と B は直交しているので、$\boxed{F_m = evB \ [\mathrm{N}] \text{ で下向き } (\downarrow)}$

(2) 等速直線運動をするとき電界による力と磁界による力が釣り合っている ($F_e = F_m$)。よって、

$$\frac{eV}{d} = evB \qquad \therefore \ \boxed{v = \frac{V}{Bd} \ [\mathrm{m/s}]}$$

なお、この方法を応用すると、電子の速度 (エネルギー) 分布を得たり、特定の速度の電子のみを抽出することができる (ウィーン (Wien) フィルタと呼ばれる)。

(3) 物体が速さ v で半径 r の円運動を行っているときは、向心力 $F_c = \dfrac{mv^2}{r}$ が働いており、この力は F_m に等しい。したがって、

$$evB = \frac{mv^2}{r} \qquad \therefore \ \boxed{r = \frac{mv}{eB} \ [\mathrm{m}]}$$

なお、この半径はラーマー (Larmor/ラーモア) 半径と呼ばれる。

教科書章末問題解答例：第 6 章 真空中の静磁界

6.1

磁界 (B) 中で速度 v の電荷 (q) が受けるローレンツ力の大きさは、$F = qvB\sin\theta$ である。題意から、磁界 B と速度 v は直交しているので、$\sin\theta = 1$。また、電子の持つ電荷の大きさは 1.60×10^{-19} [C] であるので、

$$F = qvB = 1.60 \times 10^{-19} \times 10^{6} \times 10^{-4} = \boxed{1.60 \times 10^{-17}\ [\mathrm{N}]}$$

速度 v で半径 r の等速円運動をしているときの角速度は $\omega = \dfrac{v}{r}$ であり、このときの加速度の大きさは $a = \omega^2 r = \dfrac{v^2}{r}$ である (円運動の加速度は常に中心向き)。運動方程式から、円運動のときの向心力は $F = ma = \dfrac{mv^2}{r}$ であり、この力が上記のローレンツ力に等しい。また、電子の質量は 9.11×10^{-31} [kg] であるので、ラーマ半径は、

$$r = \frac{mv^2}{F} = \frac{9.11 \times 10^{-31} \times (10^6)^2}{1.60 \times 10^{-17}} = \boxed{5.69 \times 10^{-2}\ [\mathrm{m}]}$$

6.2

無限遠の直線電流が a 離れた位置に作る磁束密度は $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$。よって、

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1}{2\pi \times 10^{-2}} = \boxed{2 \times 10^{-5}\ [\mathrm{T}]}$$

6.3

無限遠の直線電流が r 離れた位置に作る磁束密度は $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$。ここで、電流から r 離れて長さが b、微小幅が dr の長方形のエリアを考えると、この長方形を通る微小電束は $d\Phi = Bb\,dr = \dfrac{\mu_0 I b}{2\pi r} dr$。よって、2 辺が a、b の長方形を通る磁束の総量は、

$$\Phi = \int d\Phi = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I b}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \big[\ln r\big]_d^{d+a} = \boxed{\frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)\ [\mathrm{Wb}]}$$

6.4

中心半径 r で巻き数 N の無端環状ソレノイドに電流 I を流したときの中心線上の磁束密度は $B = \dfrac{\mu_0 N I}{2\pi r}$ であるので、

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1200 \times 40 \times 10^{-3}}{2\pi \times 5 \times 10^{-2}} = \boxed{1.92 \times 10^{-4}\ [\mathrm{T}]}$$

6.5

十分に細く、単位長さ当りの巻き数が n 回の円筒ソレノイド内部の磁束密度は $B = \mu_0 n I$ であるので、

$$B = \mu_0 n I = 4\pi \times 10^{-7} \times \frac{50}{0.01} \times 25 \times 10^{-3} = \boxed{1.57 \times 10^{-4}\ [\mathrm{T}]}$$

6.6

コイルが作る磁束密度を $\boldsymbol{B}_c$ [T] とすると、その向きは地磁気に垂直で、大きさは、

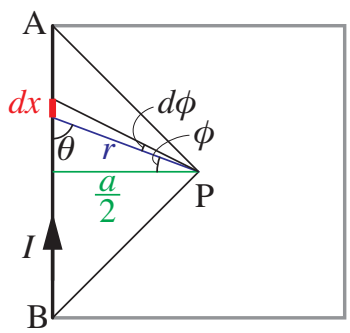
$$|\boldsymbol{B}_c| = \frac{\mu_0 N I}{2a}$$

磁針の方向は $\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_c$ の方向であるので、

$$\tan\theta = \frac{|\boldsymbol{B}_c|}{B_0} \text{ すなわち、} \theta = \tan^{-1}\frac{|\boldsymbol{B}_c|}{B_0} = \boxed{\tan^{-1}\frac{\mu_0 N I}{2aB_0}\ [\mathrm{rad}]}$$

6.7

右図のように正方形コイルの一辺 AB を考え、その部分電流 dx がコイル中心 P に作る磁束密度 dB はビオ・サバールの法則から、



$$dB = \frac{\mu_0 I dx \sin\theta}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dx \sin\theta}{r^2}$$

ここで、図中の ϕ を用いると、$dx \sin\theta = r\, d\phi$、$r = \dfrac{a}{2\cos\phi}$ となるので、

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\frac{a}{2\cos\phi}\, d\phi}{\left(\frac{a}{2\cos\phi}\right)^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\cos\phi\, d\phi$$

よって、1 辺の電流が作る磁束密度 B_1 は、

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\phi\, d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left[\sin\phi\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi a}$$

であり、正方形コイル全体が作る磁束密度 B は、

$$B = 4B_1 = \boxed{\frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}\ [\mathrm{T}]}$$

6.8

直線部分の電流は O 点を通る線上にあり、O 点の方向と電流のなす角 θ は 0、すなわち、$\sin\theta = 0$ である。従って、ビオ・サバールの法則で直線部の電流が O 点に作る磁束密度の大きさは 0 となる。一方、半円部による磁束密度は円形ループ電流が作る磁束密度の半分となる。よって、

$$B = \boxed{\frac{\mu_0 I}{4a}\ [\mathrm{T}]\ (\text{方向は}\otimes)}$$

6.9

$\odot$ 向きの電線の位置を A、$\otimes$ 向きの電線の位置を B をする。また、$\angle$OAP=$\angle$OBP=θ とする。A (B) の電線が O 点および P 点に作る磁束密度の大きさをそれぞれ B_{AO}、B_{AP} (B_{BO}、B_{BP}) とすると、

$$B_{AO} = B_{BO} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\ 、B_{AP} = B_{BP} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{d^2+h^2}}$$

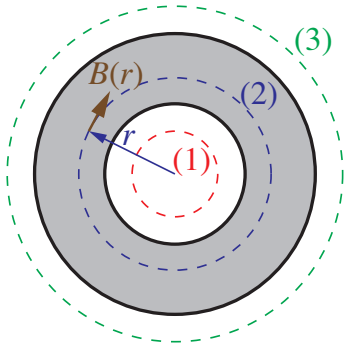
で、B_{AO}、B_{BO} の向きはともに x 軸の正方向、B_{AP}、B_{BP} の向きはそれぞれ x 軸から θ、$-\theta$ の方向である。よって、両方の電線が作る磁束密度 B_O、B_P は、

$$B_O = 2B_{AO} = \boxed{\frac{\mu_0 I}{\pi d}\ [\mathrm{T}]\ (\text{方向は}\rightarrow)}$$

$$B_P = 2\cos\theta B_{AP} = 2\frac{d}{\sqrt{d^2+h^2}}\frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{d^2+h^2}} = \boxed{\frac{\mu_0 I d}{\pi(d^2+h^2)}\ [\mathrm{T}]\ (\text{方向は}\rightarrow)}$$

6.10

電流分布が点 O を中心とする回転対称であるため、生じる磁束密度も点 O を中心とする回転対称、すなわち磁束密度の方向は角方向成分のみを持ち、動径方向成分は 0 である。そこで、磁束密度の角方向成分を点 O からの距離 r の関数として $B(r)$ とし、3 つの領域 (1) 中空部 $(0 \leq r < a)$、(2) 導体部 $(a \leq r \leq b)$、(3) 導体外部 $(b < r)$ を考える (右上図参照)。



(1) $0 \leq r < a$ の領域で半径 r の閉曲線を考えると、この閉曲線を通過する電流は 0 であるので、アンペアの周回積分の法則から、

$$\oint_c B(r)ds = 2\pi r B(r) = 0 \text{ すなわち、} B(r) = \boxed{0\ [\mathrm{T}]}$$

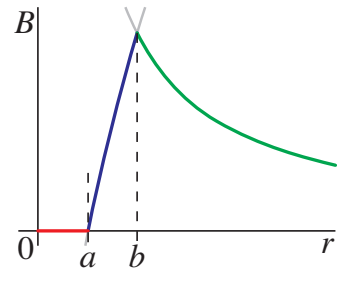
となる。

(2) $a \leq r \leq b$ で半径 r の閉曲線を考える。このとき、中空電線中の電流密度を J とすると、

$$\oint_c B(r)ds = 2\pi r B(r) = \mu_0 \pi (r^2 - a^2) J \text{ すなわち、} B(r) = \frac{\mu_0 (r^2 - a^2) J}{2r}$$

ここで電流密度は $J = \dfrac{I}{\pi(b^2 - a^2)}$ であることを考慮すると、

$$B(r) = \boxed{\frac{\mu_0 I (r^2 - a^2)}{2\pi r (b^2 - a^2)}\ [\mathrm{T}]}$$



(3) $b < r$ の領域で半径 r の閉曲線を考えると、この閉曲線を通過する電流は I であるので、

$$\oint_c B(r)ds = 2\pi r B(r) = \mu_0 I \text{ すなわち、} B(r) = \boxed{\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\ [\mathrm{T}]}$$

なお、上の結果をグラフで示すと右下図のようになる。

6.11

半径 a の円形電流ループの中心軸上でコイル中心から z 離れた位置の磁束密度 $B(z)$ は、教科書 98-99 ページにあるように

$$B(z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

と書ける。従って、半径 a のヘルムホルツコイルの一方のコイル中心 (B_c) とコイル間の中点 (B_0) の磁束密度は、

$$B_c = B(0) + B(a) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2)^{3/2}} + \frac{\mu_0 I a^2}{2(2a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2a} + \frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}a} = \boxed{\frac{(4+\sqrt{2})\mu_0 I}{8a}\ [\mathrm{T}]}$$

$$B_0 = 2 \cdot B(a/2) = 2 \cdot \frac{\mu_0 I a^2}{2((a/2)^2 + a^2)^{3/2}} = \boxed{\frac{8\mu_0 I}{5\sqrt{5}a}\ [\mathrm{T}]}$$

6.12

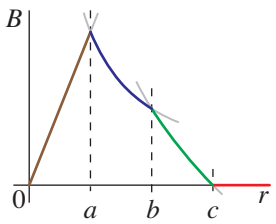
上記 6.10 と同様に、導体中心からの距離 r に対する磁束密度 $B(r)$ を考え、(1) 内部導体内 $(0 \leq r \leq a)$)、(2) 導体間 $(a < r < b)$)、(3) 外部導体内 $(b \leq r \leq c)$、(4) 同軸線外部 $(c < r)$ の各部を考える。内部導体の電流密度を J_i、外部導体の電流密度を J_o とすると、

$$J_i = \frac{I}{\pi a^2} \text{ 、} J_o = -\frac{I}{\pi(c^2 - b^2)}$$

である (同軸線は往復電流であるため、中心導体の電流密度を正とすると外部導体の電流密度は負)。

(1) $0 \leq r \leq a$ の領域 (内部導体内) で半径 r の閉曲線を考えると、アンペアの周回積分の法則から、

$$\oint_c B(r)ds = 2\pi r B(r) = \mu_0 \pi r^2 J_i \text{ すなわち、} B(r) = \frac{\mu_0 r J}{2} = \boxed{\frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r \text{ [T]}}$$



(2) $a < r < b$ の領域 (導体間) で半径 r の閉曲線を考えると、この閉曲線を通過する電流は I であるので、

$$\oint_c B(r)ds = 2\pi r B(r) = \mu_0 I \text{ すなわち、} B(r) = \boxed{\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \text{ [T]}}$$

(3) $b \leq r \leq c$ の領域 (外部導体内) で半径 r の閉曲線を考えると、

$$\oint_c B(r)ds = 2\pi r B(r) = \mu_0 \left\{ I + \pi(r^2 - b^2) J_o \right\} \text{ すなわち、} B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right) = \boxed{\frac{\mu_0 I (c^2 - r^2)}{2\pi r (c^2 - b^2)} \text{ [T]}}$$

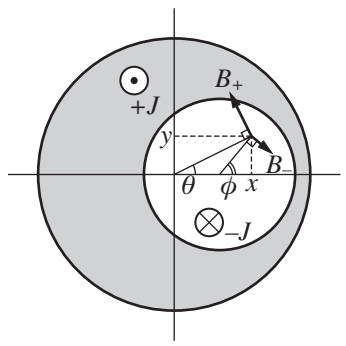
(4) $c < r$ の領域 (同軸線外部) で半径 r の閉曲線を考えると、

$$\oint_c B(r)ds = 2\pi r B(r) = \mu_0 (I - I) = 0 \text{ すなわち、} B(r) = \boxed{0 \text{ [T]}}$$

なお、上の結果をグラフで表すと右上図のようになる。

6.13

半径 a の金属線が内部まで詰まっている場合には、電流密度 J の電流が流れているときの導体内部 (中心からの距離 r) の磁束密度の大きさは教科書 103-104 ページにあるように $B = \mu_0 J r/2$ である ($J = I/\pi a^2$ を考慮)。そこで、偏心中空電線の問題を、半径 a の電線全体に $+J$ の電流が流れた状態と半径 b の電線全体に $-J$ の電流が流れた状態の合成であると考える。右図のように、空洞内部の点 (x, y) を考えたとき、$+J$ の電流がこの位置に作る磁束密度 B_+ と $-J$ の電流が作る磁束密度 B_- の大きさは、それぞれ、



$$B_+ = \frac{\mu_0 J}{2}\sqrt{x^2 + y^2} \text{ 、} B_- = \frac{\mu_0 J}{2}\sqrt{(x - d)^2 + y^2}$$

図中に示した角度 θ、ϕ を用いて、これらの磁束密度を x-y 成分でベクトル表記すると、

$$\boldsymbol{B}_+ = (-B_+ \sin\theta,\ B_+ \cos\theta) \text{ 、} \boldsymbol{B}_- = (B_- \sin\theta,\ -B_- \cos\theta)$$

ここで、$\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$、$\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$、$\sin\phi = \dfrac{y}{\sqrt{(x - d)^2 + y^2}}$、$\cos\phi = \dfrac{x - d}{\sqrt{(x - d)^2 + y^2}}$ の関係を用いると、

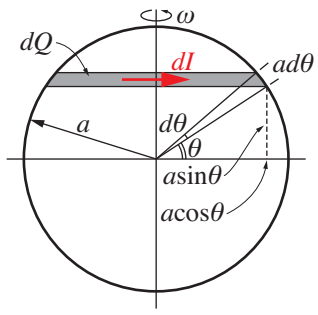
$$\boldsymbol{B}_+ = \left(-\frac{\mu_0 J y}{2},\ \frac{\mu_0 J x}{2} \right) \text{ 、} \boldsymbol{B}_- = \left(\frac{\mu_0 J y}{2},\ -\frac{\mu_0 J (x - d)}{2} \right)$$

よって、空洞内部の磁束密度は、

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_+ + \boldsymbol{B}_- = \boxed{\left(0,\ \frac{\mu_0 J d}{2} \right)} \text{ (場所によらず一定の } y \text{ 方向成分のみを持っている)}$$

6.14

半径 a の球殻に対して、図のように回転軸に垂直で球の中心を通る面から角度 θ の位置で、半径 $a\cos\theta$ で幅 $a\,d\theta$ の円形リング状の領域を考える。球殻が回転すると、このリングに帯電している電荷 dQ が回転し、円形のループ電流 dI を生じる。リングの持つ電荷はリングの面積と表面電荷密度の積であるので、



$$dQ = \sigma \cdot 2\pi a\cos\theta \cdot a\,d\theta = 2\pi\sigma a^2\cos\theta\,d\theta$$

また、電流は単位時間当りの電荷の移動量であるので、

$$dI = \frac{\omega\,dQ}{2\pi} = \omega\sigma a^2\cos\theta\,d\theta$$

となる。このような円形電流が球の中心に作る磁束密度は、教科書 (6.10) 式の結果でリング中心から球の中心までの距離 $a\sin\theta$ を考慮すると、

$$dB = \frac{\mu_0(a\cos\theta)^2 dI}{2\{(a\sin\theta)^2 + (a\cos\theta)^2\}^{3/2}} = \frac{\mu_0\cos^2\theta}{2a}dI = \frac{\mu_0\omega\sigma a}{2}\cos^3\theta\,d\theta$$

と書ける。ここで、三倍角の定理 $\cos^3\theta = \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)$ を用いると、

$$dB = \frac{\mu_0\omega\sigma a}{8}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)\,d\theta$$

また、球殻全体が作る磁束密度は dB を全球 $(-\pi/2 \sim \pi/2)$ に対して積分すれば良いので、

$$B = \int dB = \frac{\mu_0\omega\sigma a}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)\,d\theta = \frac{\mu_0\omega\sigma a}{8}\left[\frac{1}{3}\sin 3\theta + 3\sin\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \boxed{\frac{2}{3}\mu_0\omega\sigma a\ [\mathrm{T}]}$$

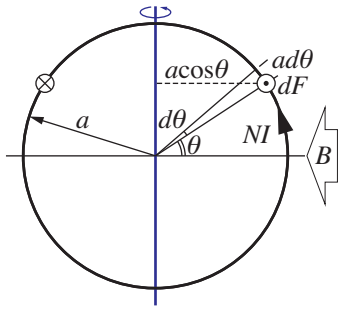
6.15

磁束密度 B 中に置かれた長さ l の電線 (磁場との角度 θ) に I の電流を流したときに電線に働く力の大きさは $F = lIB\sin\theta$ であるので、

$$F = lIB\sin\theta = 0.3\cdot 10\cdot 0.15\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{0.45\ [\mathrm{N}]}$$

6.16

コイルの半径を r、磁束密度を B、コイル電流を I、巻き数を N とすると、トルク T が最大になるのは右図のような位置関係のときである (コイル右半分は紙面上向きの力、左半分は紙面下向きの力)。ここで、コイルの中心からの角度 θ の位置にある一部の電線 (長さ $a\,d\theta$、コイル巻き数も考慮) が受ける力 dF を考える。磁束密度の方向と電線の方向がなす角は $\pi/2 - \theta$ であるので、



$$dF = NlIB\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = Na\,d\theta\,IB\cos\theta$$

であり、その方向は紙面に垂直である。また、回転のトルクは回転軸から電線までの距離とその点に加わる力の積であるので、

$$dT = a\cos\theta\,dF = Na^2IB\cos^2\theta\,d\theta$$

ここで、二倍角の定理 $\cos^2\theta = (\cos 2\theta + 1)/2$ を考慮すると、コイル全周からのトルクの総計は、

$$T = \int dT = 2Na^2IB\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta = Na^2IB\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos 2\theta + 1)\,d\theta = Na^2IB\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta + \theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi Na^2IB$$

上の式に問題で与えられた数値を代入すると、

$$T = \pi\times 15\times 0.01^2\times 1\times 0.2 = \boxed{9.42\times 10^{-4}\ [\mathrm{N{\cdot}m}]}$$

6.17

距離 d 離れた平行銅線間 (電流 I_1、I_2) に働く力の大きさは $F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$ であるので、

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} = \frac{4\pi\times 10^{-7}\cdot 10\cdot 20}{2\pi\cdot 0.1} = \boxed{4\times 10^{-4}\ [\mathrm{N/m}]\ (\text{引力})}$$

電気磁気学 2：物理に必要な最低限の数学知識

各種の用語

- **演算と演算子：**特定の計算を行うことを演算といい、計算の仕方を表す記号 (+、−、×、÷ など) を演算子という。
- **度数法と弧度法：**角度の測定法で、前者は 1 周が 360°、後者は 1 周が 2π [rad] と定義したもの。弧度法の角度は、半径 1 の円の円弧の長さに等しい。物理や数学では弧度法が標準である。角度の表現としては、これらの他に勾配 (単位%) も用いられる (道路の傾斜など)。
- **変数：**定まった値を持たない数であり、一般的に記号 x、t、θ などで表現される (代数ともいう)。物理では時間変数は t、空間座標変数は x、y、z、距離変数は r、角度変数は θ など特定の記号を用いることが多い。
- **関数：**ある変数 (例えば y) が他の変数 (例えば x) の演算 (例えば $2x+3$) によって定まる場合、「y は x の関数」といい、$y = f(x)$ と表現される。
- **独立変数と従属変数：**二つの変数の値を互いに自由に定めることができる場合、それらを独立変数という。逆に一方の値を定めると他方が定まる場合には、一方を他方の従属変数という (例えば、$y = 2x + 3$ など)。
- **媒介変数：**従属な関係にある二つの変数の関係式を直接に表すのではなく、$x = \sin\theta$、$y = \cos\theta$ のように他の変数 (これを媒介変数という) を介して表すことを媒介変数表示という。物理ではしばしば座標位置の各成分を時間を媒介変数として表示する。
- **座標系：**点の位置を表すため、基準点 (原点) と方向 (座標軸) の組を定めたものが座標系 (座標空間) である。座標軸の数は次元の数と同じである (平面なら 2、立体なら 3、時間変化する立体なら 4 など)。空間を表す座標系には直交座標系、極座標系、円筒座標系などがあり、与えられた問題に対して式や計算が容易になるように自由に選択できる。座標空間内の点の位置は、各座標軸に沿った方向の原点からの距離の組 (例えば (x, y, z)) で表現され、座標成分 (或は単に座標) と呼ぶ。

三角関数

$\angle\mathrm{ABC} = \pi/2$ の直角三角形 ABC の底辺の長さ $\overline{\mathrm{AB}} = a$、高さ $\overline{\mathrm{BC}} = b$、斜辺の長さ $\overline{\mathrm{CA}} = c$ とし、$\angle\mathrm{CAB} = \theta$ と定めたとき、6 つの三角関数が以下のように定義できる。

$$\sin\theta = \frac{b}{c} \quad \text{正弦 (サイン)}$$
$$\cos\theta = \frac{a}{c} \quad \text{余弦 (コサイン)}$$
$$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{正接 (タンジェント)}$$

$$\mathrm{cosec}\theta = \frac{c}{b} = \frac{1}{\sin\theta} \quad \text{余割 (コセカント)}$$
$$\sec\theta = \frac{c}{a} = \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{正割 (セカント)}$$
$$\cot\theta = \frac{a}{b} = \frac{1}{\tan\theta} \quad \text{余接 (コタンジェント)}$$

これらの三角関数には、以下のような性質がある。

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$
$$\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$$
$$\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$$
$$\tan(\theta+\pi) = \tan\theta$$
$$\sin(\theta+\frac{\pi}{2}) = \cos\theta$$
$$\cos(\theta+\frac{\pi}{2}) = -\sin\theta$$
$$\tan(\theta+\frac{\pi}{2}) = -\cot\theta$$

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$
$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$
$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$
$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$
$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

指数関数、対数関数

- **指数関数：**一般に $y = \alpha^x$ のとき y は x の指数関数と呼ぶ。物理や数学では $\alpha = 2.71828\cdots = e$ (ネイピア数、自然対数の底) を用いた関数に限定していることが多い。e^x は $\exp(x)$ と表現することもある。指数関数の値は常に正である。
- **対数関数：**指数関数の逆関数で $\log_\alpha x$ と表現する (α は対数の底という)。α を省略した場合、物理や数学では $\alpha = e$ の関数 (自然対数という) を指すことが多いが、$\alpha = 10$ を用いた常用対数と区別するために、$\ln x$ と書くことが多い。対数関数は $x > 0$ の範囲でのみ定義される。

指数・対数関数には以下のような性質がある。

$$
\begin{aligned}
e^0 &= 1 \\
e^{-\infty} &= 0 \\
e^{\infty} &= \infty \\
e^{-x} &= \frac{1}{e^x} \\
e^{x+y} &= e^x e^y \\
e^{x-y} &= \frac{e^x}{e^y} \\
e^{xy} &= (e^x)^y \\
e^{\ln x} &= x \\
\ln e^x &= x
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\ln 0 &= -\infty \\
\ln 1 &= 0 \\
\ln \infty &= \infty \\
\ln \frac{1}{x} &= -\ln x \\
\ln xy &= \ln x + \ln y \\
\ln \frac{x}{y} &= \ln x - \ln y \\
\log_a x &= \frac{\log_b a}{\log_b x} \quad \text{(底の変換)}
\end{aligned}
$$

微分

- 関数 $f(x)$ の x に対する微分 $\dfrac{df(x)}{dx}$ は、x を微少量 dx だけ増やしたときの $f(x)$ の増加量であり、関数 $f(x)$ の x 方向の傾きを与える。
- 関数の微分は、関数が滑らかに連続している場合にのみ定義できる。例えば、V 字型をしている場合には、V 字の頂点では微分を定義できない。
- 関数が $x = x_1$ で極大値、あるいは極小値をとるとき、$\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_1} = 0$ である。
- 多変量からなる関数 (例えば、x、y の関数 $f(x, y)$) で、一つの変数のみに着目 (他の変数は定数と看做す) して微分したもの $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ を偏微分といい、着目した方向への傾きを表す。

主要な関数の微分公式を下に示す。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}a &= 0 \\
\frac{d}{dx}x^a &= a\,x^{a-1} \\
\frac{d}{dx}e^x &= e^x \\
\frac{d}{dx}\ln x &= \frac{1}{x} \\
\frac{d}{dx}\sin x &= \cos x \\
\frac{d}{dx}\cos x &= -\sin x \\
\frac{d}{dx}\tan x &= \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\{a\,f(x)\} &= a \cdot f'(x) \\
\frac{d}{dx}\{f(x) \pm g(x)\} &= f'(x) \pm g'(x) \\
\frac{d}{dx}\{f(x)\,g(x)\} &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\
\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\{g(x)\}^2} \\
\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{f(x)}\right\} &= -\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2} \\
\frac{d}{dx}f\left(g(x)\right) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\
\frac{d}{dx}f\left(ax+b\right) &= a \cdot f'(ax+b)
\end{aligned}
$$

積分

- 関数 $f(x)$ の x に対する定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は、$x=a$ から $x=b$ の範囲で $f(x)$ の値を足し合わせたものであり、a から b の間の面積を求める計算に相当する。
- 範囲を指定しない不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ は、任意の定数 (一般的には C で表現される) を含む関数である。

主要な関数の積分公式を下に示す。

$$
\begin{aligned}
\int 0\,dx &= C \\
\int x^a dx &= \frac{1}{a+1}x^{a+1}+C \\
\int x^{-1} dx &= \ln|x|+C \\
\int e^x\,dx &= e^x+C \\
\int \sin x\,dx &= -\cos x+C \\
\int \cos x\,dx &= \sin x+C \\
\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx &= \tan x+C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int a\,f(x)\,dx &= a\,F(x)+C \\
\int \{f(x)\pm g(x)\}\,dx &= F(x)\pm G(x)+C \\
\int f(x)\cdot g'(x)\,dx &= f(x)\cdot g(x)-\int f'(x)\cdot g(x)\,dx \\
\int e^x\cdot f(x)\,dx &= e^x\cdot f(x)-\int e^x\cdot f'(x)\,dx \\
\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx &= F(g(x))+C \\
\int f(ax+b)\,dx &= \frac{1}{a}F(ax+b)+C
\end{aligned}
$$

ベクトル

- ベクトルは方向と大きさ (長さ) を持った値であり、$\vec{a}$ 或は $\boldsymbol{a}$(太字) で表す (大学以降の数学では太字を用いることの方が多い)。大きさのみを持つ値はスカラーと呼ぶ。
- ベクトルには次元があり、平面内のものは 2 次元、空間内のものは 3 次元である (1 次元はスカラーと同じ)。数学的には 4 次元以上にも拡張可能であり、任意の n 次元 (n は正の整数) ベクトルを仮定することができる。
- ベクトルは、その成分 (スカラー) を用いて、$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ と書くことができる (例は 3 次元ベクトル)。
- ベクトルは、次数分の単位ベクトル (長さ 1 のベクトル) を用いて、$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$ と書くことができる。単位ベクトルは、直交座標系では $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ の記号を用いることが多く、極座標系では $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$ といった記号を用いることが多い。
- ベクトルの長さは、各成分を用いて $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ と書ける。ベクトルの長さはスカラーである。
- ベクトルの和は、各成分の和である。$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$
- ベクトルの差は、各成分の差である。$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$
- スカラーとベクトルの積は、各成分にスカラーをかけたものである。$\beta\boldsymbol{a}=(\beta a_1,\beta a_2,\beta a_3)$
- ベクトル同士の積は 2 種類あり、一つは内積 (演算子「$\cdot$」)、他方は外積 (演算子「$\times$」) という。
- ベクトルの内積は、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ で定義されるスカラーである (内積のことをスカラー積ともいう)。
- ベクトルの内積は、それぞれの長さを用いて、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ と書くこともでき (θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角)、これは互いに平行な成分のかけ算を意味する。従って、互いに直交するベクトルの内積は 0 となる。
- ベクトルの外積は、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$ で定義されるベクトルである (外積のことをベクトル積ともいう)。
- ベクトルの外積は、それぞれの長さを用いて、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\theta$ と書くこともでき (θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角)、これは互いに垂直な成分のかけ算を意味する。これは、幾何学的には、二つのベクトルによって作られる平行四辺形の面積を求めることに等しい。よって、互いに平行なベクトルの外積は 0 となる。

- ベクトルの外積と、それぞれのベクトルとの内積 $((\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a}$ や $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b})$ は常に 0 になる (各成分を用いて計算してみて欲しい)。すなわち、ベクトルの外積の結果は、それぞれのベクトルと直交している。
- 外積ベクトルの方向は右ネジの法則に従っており、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ 方向に右ネジが回転したときに進む方向、$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{b}$ から $\boldsymbol{a}$ 方向に右ネジが回転したときに進む方向となる。従って、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$ の関係があり、かけ算の順序によって方向が異なる (長さは同じ)。