電気磁気学 II：8 章、9 章の重要ポイント

1　8 章：電磁誘導

- **電磁誘導：**閉回路と鎖交する磁束が変化するとき、回路には磁束変化を妨げる電流が流れる方向に誘導起電力を生じる。また、この誘導起電力 e [V] は磁束鎖交数 φ [Wb] を用いて、$\boxed{e = -\dfrac{d\varphi}{dt}\ \text{[V]}}$ である (ファラデーの法則)。ここで磁束鎖交数とは、回路と交わる磁束の総数で、回路を通る磁束 Φ [Wb] と回路の巻数 N を用いて $\boxed{\varphi = N\Phi\ \text{[Wb]}}$。

- **導体の運動による起電力：**直線状の導体が磁束密度 B [T] と角度 θ をなす方向に速度 v [m/s] で運動しているとき、導体には単位長さ当り $\boxed{E = vB\sin\theta\ \text{[V/m]}}$ の起電力を生じる。また、このときの起電力の方向はフレミングの右手の法則で表すことができ、各指の対応は、親指=v、人差指=B、中指=E である。この現象は導体内の電子 (電荷) が磁界中を運動することによって受けるローレンツ力によって生じる。

- **渦電流：**電磁誘導はコイル状の電線だけではなく、塊の導体に対しても生じる。すなわち、導体を貫く磁束が変化すると、磁束変化を妨げる方向に渦巻き状の電流 (渦電流) が流れる。渦電流は導体の抵抗を受けて発熱 (ジュール熱) を生じ、エネルギーを消費する (渦電流損)。

- **表皮効果：**導体線に交流電流が流れるとき、導体内に生じる誘導起電力は導体表面より導体中心部の方が大きくなる。この結果、導体中心部の電流は妨げられ、導体表面を優先的に電流が流れる (表皮効果)。表皮効果は周波数が高いほど大きくなり、60Hz(家庭用 100V 電源) だと 8 mm 程度、1GHz(携帯電話の電波の周波数) だと 2 μm 程度である。

2　9 章：インダクタンス

- **自己インダクタンス：**コイルに電流が流れるとき、自身が作る磁束によって誘導起電力 (逆起電力) を生じる (自己誘導)。この起電力 e [V] は電流 I [A] の時間変化に比例し、$\boxed{e = -L\dfrac{dI}{dt}\ \text{[V]}}$ と書ける。ここで L は自己インダクタンスと呼ばれ、その単位は [H](ヘンリー) である。自己インダクタンス L [H] はコイルに流した電流 I [A] とコイルに鎖交する磁束鎖交数 φ [Wb] を用いて、$\boxed{L = \dfrac{\varphi}{I}\ \text{[H]}}$ と書くこともできる。自己インダクタンスはコイルの形状や材質によって定まる。

- **相互インダクタンス：**二つのコイルが接近して置かれているとき、一方のコイルに流れる電流が変化すると、他方のコイルには磁束の変化を打ち消す方向に誘導起電力を生じる (相互誘導)。このとき生じる起電力 (コイル#1 を流れる電流 I_1 [A] によってコイル#2 に生じる起電力 e_{21} [V]、逆にコイル#2 を流れる電流 I_2 [A] によってコイル#1 に生じる起電力 e_{12} [V]) はそれぞれ、$\boxed{e_{21} = -M\dfrac{dI_1}{dt}\ \text{[V]}}$、$\boxed{e_{12} = -M\dfrac{dI_2}{dt}\ \text{[V]}}$ と書くことができ、M を相互インダクタンスと呼ぶ (単位は [H])。相互インダクタンスは、コイル#1 の電流 (I_1 [A]) によってコイル#2 に鎖交する磁束鎖交数 φ_{21} [Wb] を用いて、$\boxed{M = \dfrac{\varphi_{21}}{I_1}\ \text{[H]}}$ と書くこともできる (逆の $\boxed{M = \dfrac{\varphi_{12}}{I_2}\ \text{[H]}}$ も成立する)。相互インダクタンスと自己インダクタンス (L_1、L_2 [H]) の間には、$\boxed{M = \pm k\sqrt{L_1 L_2}\ \text{[H]}}$ が成立する。ここで k は結合係数 ($0 \leqq k \leqq 1$) と呼ばれる値 (無次元数) であり、$k = 0$ は一方の磁束が他方と全く鎖交しない状態、$k = 1$ は一方の磁束が全て他方のコイルと鎖交している場合に対応する。また、$\pm$ の符号は、双方を流れる電流による磁束が同方向の場合に $+$、逆方向の場合に $-$ となる。

- **合成インダクタンス：**複数のコイルを接続したとき、それらを一つの等価なコイルに置き換えたときのインダクタンスを合成インダクタンスと呼ぶ。合成インダクタンスは以下のようになる。

  - **相互インダクタンスが無視できる場合**

    直列接続：$\boxed{L = L_1 + L_2 \text{ [H]}}$、並列接続：$\boxed{\dfrac{1}{L} = \dfrac{1}{L_1} + \dfrac{1}{L_2} \text{ [1/H]}}$

  - **相互インダクタンス (M) が無視できない場合**

    直列接続：$\boxed{L = L_1 + L_2 + 2M \text{ [H]}}$ (M は接続の極性によって正負が異なるので、合成インダクタンスは接続の極性に依存)

- **インダクタンスのもつ磁気エネルギー：**コイルに電流を流すためには誘導起電力に抗して外部からエネルギーを与える必要がある。このエネルギーはコイルに磁気エネルギーとして蓄えられる。また、その値 W_m [J] はコイルの自己インダクタンス L [H] とコイルに流れる電流 I [A] を用いて $\boxed{W_m = \dfrac{1}{2}LI^2 \text{ [J]}}$ と書ける。

- **各種ソレノイドの自己インダクタンス：**

  - **無端環状ソレノイド** (十分に細い場合)：$\boxed{L = \dfrac{\mu_0 N^2 S}{l} \text{ [H]}}$

    巻数 N [回]、断面積 S [m^2]、磁路長 (1 周の長さ)l [m]

  - **無限長空芯ソレノイド**：$\boxed{L = \mu_0 n^2 S \text{ [H/m]}}$ (単位長さ当りであることに注意)

    単位長さ当りの巻数 n [回]、断面積 S [m^2]

  - **有限長空芯ソレノイド**：$\boxed{L = K\mu_0 n^2 \pi \left(\dfrac{D}{2}\right)^2 l \text{ [H]}}$

    単位長さ当りの巻数 n [回]、直径 D [m]、長さ l [m]、長岡係数 K (長岡係数は無次元数で D/l に依存し、$D/l \to 0$ (十分に細長くなる) で $K \to 1$)

3 その他の注意点

- このプリントは要点だけをまとめたものであり、問題を解く際に最低限知っておくべき公式や法則のみが書かれている。実際の問題を解くには、これらの式や法則を活用する能力が求められる。プリント演習問題、教科書の例題・章末問題を復習して、応用力を養っておくこと。
- 問題を解くためには、8、9 章の知識だけではなく、力学、電磁気学、数学などの基礎知識も必要であるので、これら関連基礎知識も復習しておくこと。
- 教科書や授業で用いている物理量の単位は全て SI 単位系 (長さ：m、重さ：kg、時間：s、電流：A . . .) である。単位も含めて覚えておくこと。また、計算問題に際しては、単位を SI 単位系に変換するのを忘れないこと。
- 本資料およびプリント演習問題・教科書章末問題の解答例を以下からダウンロードできるので、適宜参考とすること。

  `http://www.surf.nuqe.nagoya-u.ac.jp/members/nakahara/EM2_summary2.pdf`

電気磁気学 II 演習 5

学籍番号： 学籍番号　　氏名： 氏名　　評価： A/B/C

5-1

以下の文中の□内に適切な語句あるいは式を記入せよ。

(1) 磁界は電流によって作られるが、その反対に 磁界 から 電流 を作ることも可能である。これはファラデーの 電磁誘導 の法則として知られている。この法則によると、閉回路に誘起される起電力 e [V] は磁束鎖交数 ϕ [Wb] を用いて $e = -\dfrac{d\varphi}{dt}$ と書くことができる。

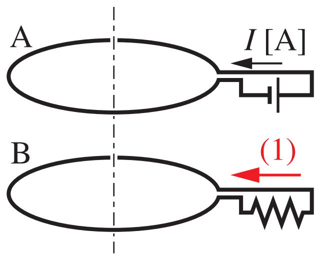
(2) (1) の式は、閉回路と鎖交する磁束が 変化する ときだけ閉回路に起電力を生じ、その向きは磁束変化を 妨げる電流を生じる 方向に発生する、という意味である。これは レンツ の法則として知られる。

5-2

図のように、二つのコイル A と B が向かい合わせに配置されており、コイル A には定常電流 I [A] が流れている。以下の問いに答えよ。

(1) コイル A の電流を切った時、コイル B に流れる誘導電流の向きを図に描け。

(2) コイル A に定常電流を流したままコイル B を移動したところ、(1) と同方向に誘導電流が流れた。コイル B を移動した方向は A に近づく方向か、離れる方向か、どちらか答えよ。



(1) 右図参照

(2) 電流を切った時 (磁束が減少した時) と同じ方向に誘導電流が流れたということは、移動によって磁束鎖交数が減少する方向に移動したことになるので、コイル B は A から離れる方向に移動した。

5-3

巻き数が 10 回のコイルに 0.5 Wb の磁束が鎖交している。この磁束を 0.1 s でゼロに減少させた時 (変化は直線的とする)、コイルに誘起される起電力の大きさを求めよ。

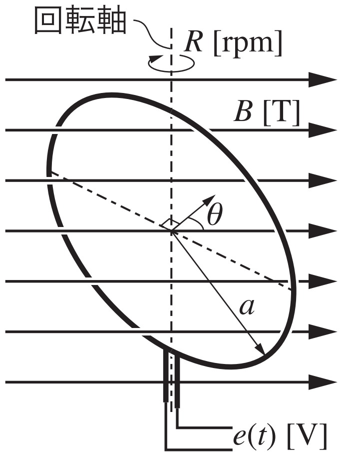
ファラデーの法則により、起電力の大きさ $|e|$ は、

$$|e| = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{10 \times 0.5}{0.1} = \boxed{50\ [\mathrm{V}]}$$

裏面へ続く

5-4

図のように、半径 a [m] で N 回巻きの円形コイルが磁束密度 B [T] の空間に置かれており、コイルは磁界に垂直な回転軸に対して R [回転/分] で回転している。このときコイルには交流電圧 $e(t)$ が誘起されるが、この交流電圧の振幅と周波数を求めよ。



回転の周波数は、$f = R/60$ [Hz] であるので、角度速度にすると、$\omega = 2\pi f = \pi R/30$ [rad/s]。また、図のように角度 θ のときにコイルと鎖交する磁束数 φ は、

$$\varphi = NB \cdot \pi a^2 \cos\theta$$

であり、$\theta = \omega t$ であるので、誘導起電力 $e(t)$ は、

$$e(t) = -\frac{d\varphi}{dt} = -\pi a^2 NB \frac{d\cos\omega t}{dt} = \pi a^2 NB\omega \sin\omega t$$
$$= \frac{\pi^2 Ra^2 NB}{30} \sin(\frac{\pi R}{30} t)$$

したがって、$\boxed{\text{振幅が } \dfrac{\pi^2 Ra^2 NB}{30} \text{ [V]、周波数が } R/60 \text{ [Hz] の交流電圧となる。}}$

電気磁気学 II 演習 6

学籍番号：学籍番号　　氏名：氏名　　評価：A/B/C

6-1

以下の文中の$\boxed{}$内に適切な語句あるいは式を記入せよ。

(1) 導体を貫く磁束が変化すると、コイルと同様に磁束変化を$\boxed{\text{打ち消す}}$方向の電流が導体に流れる。この電流を$\boxed{\text{渦電流}}$という。また、この電流によるエネルギー損失を$\boxed{\text{渦電流損}}$という。

(2) 導体線に交流電流が流れる時、導体内部に生じる誘導起電力は中心部のほうが$\boxed{\text{大きい}}$ため、中心部では電流が$\boxed{\text{流れにくい}}$。このような現象を$\boxed{\text{表皮効果}}$といい、高い周波数になればなるほどこの効果は$\boxed{\text{大きい}}$。

(3) 電線を磁界中で移動させると、電線内部の$\boxed{\text{自由電子}}$が$\boxed{\text{ローレンツ}}$力によって移動し、起電力が発生する。また、この起電力は電線の長さ ℓ [m]、磁束密度 B [T]、移動速度 v [m/s]、B と v のなす角 θ とすると、$e = \boxed{vB\ell\sin\theta}$ [V] と書くことができる。起電力の方向はフレミングの$\boxed{\text{右}}$手の法則に従い、v は$\boxed{\text{親}}$指、B は$\boxed{\text{人指}}$指、e は$\boxed{\text{中}}$指に対応する。

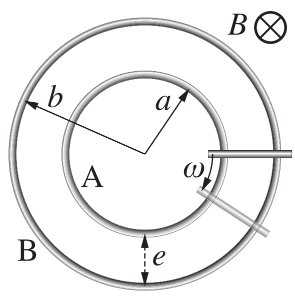
6-2

1.0 [T] の磁場中を、20 [cm] の金属棒が磁場に対して 45° の方向に速度 2.0 [m/s] で移動している時、棒の両端に生じる誘導起電力の大きさを求めよ (小数点以下第 2 位まで計算すること)。

$$e = vB\ell\sin\theta = 2.0 \times 1.0 \times 0.2 \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{0.28\ [\mathrm{V}]}$$

6-3

下図のように一様な磁束密度 B [T] 中に同軸で置かれた半径 a [m] と半径 b [m] の 2 つのリング電極 (それぞれリング A、リング B とする) があり、リングの半径方向に導体棒が渡してある。導体棒をリング中心を軸に角速度 ω [rad/s] で時計回りに回転させるとリング A/B 間に誘導起電力 e [V] を生じる。(1) 生じる起電力は、リング A とリング B のいずれが正極側になるか？ (2) 生じる起電力の大きさを求めよ。



(1) フレミングの右手の法則から、$\boxed{\text{リング B が正極}}$になる。

(2) 回転中心から距離 r [m] の位置における移動速度は $r\omega$ であるので、

$$e = \int_{r=a}^{b} de = \int_a^b r\omega B\, dr = \omega B\left[\frac{1}{2}r^2\right]_a^b = \boxed{\frac{1}{2}(b^2 - a^2)\omega B\ [\mathrm{V}]}$$

裏面へ続く

6-4

図のように、一様な磁束密度 B [T] 中に置かれた 2 本の平行導体 (間隔 d [m]) があり、平行導体の端には抵抗 R [Ω] が接続されている。また、平行導体に直行して別の直線導体 A が置かれている。導体棒の抵抗は無視するとして、以下の問いに答えよ。

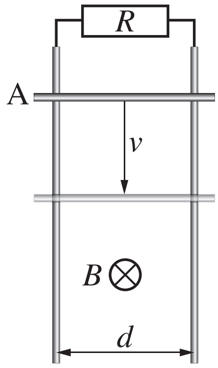
(1) 直線導体 A を速度 v [m/s] で下向きに移動させる時、抵抗 R を流れる電流の大きさと向きを答えよ。

(2) 直線導体 A を速度 v [m/s] で下向きに移動させるために必要な力の大きさを求めよ。

(3) 直線導体 A を移動させるための仕事と、抵抗 R で消費する仕事が等しいことを示せ。

(4) 直線導体 A と平行にもう一本の直線導体 B を置き、A と B を共に下向きに速度 v [m/s] で移動させた。このとき抵抗 R に流れる電流の大きさを求めよ。

(5) 直線導体 A と平行にもう一本の直線導体 B を置き、A は下向き、B は上向きに速度 v [m/s] で移動させた。このとき抵抗 R に流れる電流の大きさを求めよ。



(1) フレミングの右手の法則から導体棒 A の起電力は右向き (右が+)、すなわち 抵抗を左向き に電流が流れる。また、このときの電流値は

$$I = \frac{e}{R} = \boxed{\frac{vBd}{R}\ [\mathrm{A}]}$$

(2) 導体棒を動かすには電磁力と等しい力を与える必要があるので、

$$F = IBd = \frac{vBd}{R} \cdot Bd = \boxed{\frac{vB^2d^2}{R}\ [\mathrm{N}]}$$

(3) 導体棒を動かすための仕事率 (=1 秒当たりの仕事量) は

$$W = Fv = \frac{v^2B^2d^2}{R}\ [\mathrm{W}]$$

一方、抵抗で消費する電力 (=1 秒当たりの仕事量) は

$$P = I^2R = \left(\frac{vBd}{R}\right)^2 R = \frac{v^2B^2d^2}{R}\ [\mathrm{W}]$$

すなわち、直線導体 A を移動させるための仕事と、抵抗 R で消費する仕事は等しい。

(4) 導体棒 A と導体棒 B は同じ向きの起電力を生じるので、起電力 (電池) の並列接続になり、抵抗に流れる電流は (1) と同じ、すなわち、

$$I = \frac{e}{R} = \boxed{\frac{vBd}{R}\ [\mathrm{A}]}$$

(5) 導体棒 A と導体棒 B は逆向きの起電力を生じるので、合計の起電力は 0 となり、 抵抗に流れる電流は 0 [A] となる。

電気磁気学 II 演習 7

学籍番号：学籍番号　氏名：氏名　評価：A/B/C

7-1

以下の文中の□内に適切な語句あるいは式を記入せよ。

(1) コイルに流れる電流が変化すると、その変化を妨げる起電力を生じする。これを 自己誘導 という。この起電力は電流の変化速度に比例し、その比例定数を 自己インダクタンス という。この作用によって、コイルには 高い 周波数の交流が流れにくくなる。

(2) 2 つの隣接するコイルの一方に流れる電流が変化すると、他方のコイルにその変化を妨げる起電力を生じする。これを 相互誘導 という。この起電力は電流の変化速度に比例し、その比例定数を 相互インダクタンス という。

(3) コイルに電流を流すためには、上記の起電力に抗して電圧を外部から加える必要があるため、外部電圧はコイルに対して仕事をし、結果としてコイルに 磁気 エネルギーを蓄えることができる。また、このエネルギーの大きさは (1) の比例定数 L、コイルに流れる電流 I を用いて、$\dfrac{1}{2}LI^2$ と書ける。

7-2

以下の 3 つのソレノイドの自己インダクタンスを求めよ。計算にあたっては $\mu_0 = 1.26 \times 10^{-6}$ を用い、有効数字 2 桁で答えよ。

(1) 巻き数 1000 回、コイル部の断面直径 4 mm で平均直径 5.0 cm の空芯環状ソレノイド

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{2\pi r} = \frac{1.26 \times 10^{-6} \times 1000^2 \times 3.14 \times 0.002^2}{2 \times 3.14 \times 0.025} = 1.01 \times 10^{-4} = \boxed{0.10\ [\mathrm{mH}]}$$

(2) 巻き数 20 回/cm、コイル部が比透磁率 800 の鉄心で断面が 1 辺 1 cm の正方形である無限長ソレノイド

$$L = \mu_r \mu_0 n^2 S = 800 \times 1.26 \times 10^{-6} \times 2000^2 \times 0.01^2 = 0.403 = \boxed{0.40\ [\mathrm{H}]}$$

(3) 巻き数 500 回、コイル部が断面直径 10 mm で長さが 20 mm のパーマロイ (比透磁率 10^4) であるソレノイド

$$L = K\mu_r\mu_0 n^2 S\, l = 0.818 \times 10^4 \times 1.26 \times 10^{-6} \times \left(\frac{500}{0.02}\right)^2 \times 3.14 \times 0.005^2 \times 0.02$$

$$= 10.1 = \boxed{10\ [\mathrm{H}]}$$

裏面へ続く

7-3

1 次回路に 3.0 A の電流を流したとき、巻き数 1000 回の 2 次回路に 1.5×10^{-4} Wb の磁束が鎖交した。(1) 相互インダクタンスを求めよ。(2) 2 次回路の巻き数を 2 倍にすると、相互インダクタンスは何倍になるか。

(1) 2 次回路と鎖交する磁束鎖交数 φ_{21} は、

$$\varphi_{21} = N_2\Phi_1 = 1000 \times 1.5 \times 10^{-4} = 0.15\ [\mathrm{Wb}]$$

よって、相互インダクタンス M は、

$$M = \frac{\varphi_{21}}{I_1} = \frac{0.15}{3.0} = 0.05 = \boxed{50\ [\mathrm{mH}]}$$

(2) 2次回路の巻き数が2倍になると、φ_{21} も2倍になるので、$\boxed{\text{相互インダクタンスは2倍になる。}}$

7-4

2 つのコイル A、B がある。コイル A に流れる電流が 10 ms で 10 A 変化したときコイル A、B にそれぞれ 100 V、20 V の誘導起電力を生じた。(1) コイル A の自己インダクタンス L_A を求めよ。(2) 相互インダクタンス M を求めよ。(3) 結合係数が 0.1 として、コイル B の自己インダクタンス L_B を求めよ。

(1) コイル A に誘起される起電力は $e_A = -L_A \dfrac{dI_A}{dt}$ であるので、

$$L_A = |e_A|\frac{dt}{dI_A} = 100 \cdot \frac{0.01}{10} = 0.1 = \boxed{100\ [\mathrm{mH}]}$$

(2) コイル B に誘起される起電力は $e_B = -M\dfrac{dI_A}{dt}$ であるので、

$$M = |e_B|\frac{dt}{dI_A} = 20 \cdot \frac{0.01}{10} = 0.02 = \boxed{20\ [\mathrm{mH}]}$$

(3) $M = k\sqrt{L_A L_B}$ であるので、

$$L_B = \left(\frac{M}{k}\right)^2 \frac{1}{L_A} = \left(\frac{0.02}{0.1}\right)^2 \frac{1}{0.1} = 0.4 = \boxed{400\ [\mathrm{mH}]}$$

教科書章末問題解答例：第８章 真空中の電磁誘導

8.1

発生する起電力 e は、

$$e = -N\frac{d\varphi}{dt} = -10 \times \frac{-0.25}{0.01} = \boxed{250\ [\mathrm{V}]}$$

8.2

発生する起電力 e は、

$$e = -N\frac{d\Phi}{dt} = -N\Phi_0\frac{d\sin\omega t}{dt} = \boxed{-N\omega\Phi_0\cos\omega t\ [\mathrm{V}]}$$

8.3

コイルが磁束に垂直なときにコイルを通過する磁束交差数は、$\Phi_0 = 600 \times \pi \times 0.05^2 \times 0.1 = 0.15\pi$。また、コイルの回転数は角速度 $\omega = 2\pi \times 1500/60 = 50\pi$。ここで、コイルの回転によって変化する磁束交差数は $\Phi = \Phi_0 \sin\omega t$ と書けるので、起電力 e は 8.2 と同様に、$e = -\omega\Phi_0\cos\omega t$ となり、振幅 V_0 および周波数 f は、

$$V_0 = \omega\Phi_0 = 50\pi \cdot 0.15\pi = 7.5\pi^2 = \boxed{74.0\ [\mathrm{V}]}\text{、}f = \frac{\omega}{2\pi} = \boxed{25\ [\mathrm{Hz}]}$$

8.4

$\sin(2\pi ft) = 1$ のときにコイルを通る磁束交差数は、

$$\Phi_0 = Na\int_0^a B_0\sin(\pi x)\,dx = NaB_0\int_0^a \sin(\pi x)\,dx = NaB_0\left[-\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^a = \frac{NaB_0}{\pi}\left\{1-\cos(\pi a)\right\}$$

従って、コイルに生じる起電力は、

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\Phi_0\frac{d\sin(2\pi ft)}{dt} = \frac{NaB_0}{\pi}\left\{\cos(\pi a)-1\right\}\cdot 2\pi f\cos(2\pi ft) = \boxed{2NafB_0\left\{\cos(\pi a)-1\right\}\cos(2\pi ft)\ [\mathrm{V}]}$$

8.5

磁界中を移動する直線導体の両端に生ずる起電力 e は、

$$e = lvB\sin\theta = 0.4 \times 3 \times 0.15 \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{0.18\ [\mathrm{V}]}$$

8.6

磁束密度は $B_0 = \mu_0 H_0$ であるので、コイルが磁界に直交しているときの磁束交差数は、$\Phi_0 = \mu_0 H_0 abN$。コイルが ω で回転するときの磁束交差数の時間変化は、$\Phi = \Phi_0\cos\omega t$ であるので、コイルに生じる起電力は、

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 H_0 abN\frac{\cos\omega t}{dt} = \boxed{\mu_0 H_0 abN\omega\sin\omega t\ [\mathrm{V}]}$$

8.7

導体棒の両端に生じる起電力は、

$$V = lvB\sin\theta = 0.15 \times 2 \times 0.4 \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.12\ [\mathrm{V}]$$

よって、オームの法則より回路を流れる電流は、

$$I = \frac{V}{R} = \frac{0.12}{2} = 0.06 = \boxed{60\ [\mathrm{mA}]\text{、a}\rightarrow\text{b の方向}}$$

棒に電流が流れているとき、棒には磁界から左向きの電磁力が働く。この大きさは、

$$F = lIB\sin\theta = 0.15 \times 0.06 \times 0.4 \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{3.6 \times 10^{-3}\ [\mathrm{N}]}$$

抵抗で消費される電力を $P_e = IV$、棒を動かす仕事率を $P_m = Fv$ とすると、

$$P_e = IV = I \cdot lvB\sin\theta = lIB\sin\theta \cdot v = Fv = P_m$$

すなわち、棒を動かすための力学的エネルギーが抵抗で消費される電気エネルギーに変換されていることがわかる。

教科書章末問題解答例：第 9 章 インダクタンス

9.1

二次コイルとの磁束鎖交数 φ_{21} と一次コイルの電流 I_1、相互インダクタンス M の関係は、$\varphi_{21} = MI_1$ であるので、

$$M = \frac{\varphi_{21}}{I_1} = \frac{1000 \times 1.5 \times 10^{-4}}{3} = \boxed{5 \times 10^{-2}\ [\mathrm{H}]}$$

9.2

#1 コイルの自己インダクタンスを L_1、相互インダクタンスを M とすると、$e_1 = -L_1 \dfrac{dI}{dt}$、$e_2 = -M \dfrac{dI}{dt}$ であるので、

$$L_1 = 100 \cdot \frac{0.01}{10} = \boxed{0.1\ [\mathrm{H}]}$$

$$M = 20 \cdot \frac{0.01}{10} = \boxed{0.02\ [\mathrm{H}]}$$

9.3

それぞれのコイルの自己インダクタンスを L とすると、$\varphi = LI$ であるので、

$$L = \frac{\varphi}{I} = \frac{200 \times 10^{-4}}{5} = 4 \times 10^{-3}$$

相互インダクタンス M は、9.1 と同様に、

$$M = \frac{200 \times 10^{-4} \times 0.8}{5} = \boxed{3.2 \times 10^{-3}\ [\mathrm{H}]}$$

また、結合係数 k との関係は、$M = k\sqrt{L \cdot L}$ であるので、

$$k = \frac{M}{L} = \frac{3.2 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-3}} = \boxed{0.8}$$

9.4

$\varphi = LI$ であるので、

$$\varphi = 0.1 \times 3 = \boxed{0.3\ \mathrm{Wb}}$$

また、コイルに蓄えられる磁気エネルギーは $W_m = \dfrac{1}{2}\varphi I$ であるので、

$$W_m = \frac{1}{2} \times 0.3 \times 3 = \boxed{0.45\ [\mathrm{J}]}$$

9.5

コイル#1 に電流 I_1 を流し、続いてコイル#2 に電流 I_2 を流すことを考える。コイル#1 に電流を流すときにする仕事は、

$$dW_1 = v_1 i_1 dt = L_1 \frac{di_1}{dt} \cdot i_1 \cdot dt = L_1 i_1 di_1$$

ここで、v_1 はコイル#1 の自己誘導による起電力、i_1 は瞬間の電流値である。コイル#1 が電流値 I_1 に達するまでに電源がする仕事の総量は、

$$W_1 = \int_0^{I_1} dW_1 = \int_0^{I_1} L_1 i_1 di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

となる。このとき、コイル#2 には相互誘導による起電力 $e_{12} = -\frac{d\varphi_{12}}{dt} = -M\frac{di_1}{dt}$ を生じるが、コイル#2 にはまだ電流を流していないので、このときに外部電源がする仕事は 0 である。
次に、コイル#2 に電流を流すと、自己誘導によって蓄えられる磁気エネルギーはコイル#1 のときと同様に、

$$W_2 = \int_0^{I_2} dW_2 = \int_0^{I_2} L_2 i_2 di_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

となる。このとき、コイル#1 には相互誘導によって力 $e_{21} = \mp\frac{d\varphi_{21}}{dt} = \mp M\frac{di_2}{dt}$ の起電力を生じる。ここで $\mp$ の符号は、$-$ のときはコイル#1 とコイル#2 の作る磁場の方向が同じ (互いのコイルの間に引力が働く状態) であり、$+$ のときは磁場が反対向き (斥力が働く状態) であることを示す。
そこで、コイル#1 に I_1 の電流を流している電源が、コイル#2 からの相互誘導によって行う仕事は、

$$dW_{21} = v_{21} I_1 dt = -e_{21} I_1 dt = \pm M I_1 di_2$$

と書けるので (符号が反転していることに注意)、コイル#2 が電流値 I_2 に達するまでにコイル#1 の電源がする仕事の総量は、

$$W_{21} = \int_0^{I_2} dW_{21} = \int_0^{I_2} \pm M I_1 di_2 = \pm M I_1 I_2$$

すなわち、両方のコイルに蓄えられる磁気エネルギーの総量は、

$$W = W_1 + W_2 + W_{21} = \boxed{\frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \pm M I_1 I_2 \text{ [J]}}$$

この結果からわかるように、二つのコイルの磁場の向きを揃えたほうが、より大きな磁気エネルギーを蓄えることができる (磁場の向きを揃えるとコイル内の磁束が増える→磁気エネルギーが増える)。

9.6

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r N^2 S}{l} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 800 \times 1200^2 \times 1 \times 10^{-4}}{2\pi \times 0.05} = \boxed{0.461 \text{ [H]}}$$

9.7

$$L = K\mu_0 n^2 \left(\frac{\pi D^2}{4}\right) l = 0.884 \times 4\pi \times 10^{-7} \times \left(\frac{50}{0.1}\right)^2 \times \left(\frac{\pi \times 0.03^2}{4}\right) \times 0.1 = \boxed{1.96 \times 10^{-5} \text{ [H]}}$$

9.8

1-3 間の巻数を N_1、3-2 間の巻数を N_2 とすると、相互インダクタンスは教科書 p155 の式 (9.44) から、

$$M = \frac{N_1 N_2 \mu S}{l}$$

ここで、$N = N_1 + N_2$ を考慮すると、

$$M = \frac{N_1(N - N_1)\mu S}{l}$$

相互インダクタンスが最大のとき、M の N_1 微分が 0 となるので、

$$\frac{dM}{dN_1} = \frac{\mu S}{l}(N - 2N_1) = 0$$

μ、S、l はいずれも正なので、上式を満たす条件は、

$$(N - 2N_1) = 0 \quad \text{すなわち、} \boxed{N_1 = \frac{1}{2}N \ [\text{回}]}$$

また、このときの相互インダクタンスは、

$$M = \frac{\frac{1}{2}N \cdot \frac{1}{2}N \cdot \mu S}{l} = \boxed{\frac{\mu S N^2}{4l} \ [\mathrm{H}]}$$

9.9

電線内部の自己インダクタンスを L_i、外部の自己インダクタンスを L_e とする。L_i は教科書 p159 の磁気エネルギーを用いる方法でも計算できるが、ここでは $\varphi = LI$ の関係から求めてみる。電線内部 (半径 r の位置) の磁束密度は 6 章の円柱電流による磁界 (p103〜104) の結果 (式 6.23) から、$B_i = \dfrac{\mu I r}{2\pi a^2}$ [T] である。ここで、半径 r で厚さが dr、長さが l の円筒を考えたとき、その円筒の断面 ($dr \times l$ の長方形) の磁束数は $B_i l dr$。電線に 1 A の電流が流れたときにこの円筒状の閉じた磁束と鎖交する電流は $\dfrac{\pi r^2}{\pi a^2} = \dfrac{r^2}{a^2}$、すなわち磁束鎖交数は円筒断面の磁束数にこの係数 (コイルで言うところの巻数に相当) をかけたものになる。従って、半径 r〜$r + dr$ の円筒状磁束の磁束鎖交数 $d\varphi$ は、

$$d\varphi_i = \frac{r^2}{a^2} \cdot \frac{\mu I r}{2\pi a^2} \cdot l dr = \frac{\mu l I r^3}{2\pi a^4} dr$$

これを半径 $0 \to a$ で積分すると、

$$\varphi_i = \int_0^a d\varphi = \frac{\mu l I}{2\pi a^4}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a = \frac{\mu l I}{8\pi}$$

よって、

$$L_i = \frac{\varphi_i}{I} = \frac{\mu l}{8\pi} \ [\mathrm{H}]$$

次に、電線外部の自己インダクタンスを求める。長さ l の電線から r 離れた位置の磁束密度は、電線に沿った方向の距離を電線の端から z として、

$$B(r,z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} + \frac{l-z}{\sqrt{r^2+(l-z)^2}}\right)$$

となる (これは、6 章の 6.7 式で、$a \to r$、$l_1 \to z$、$l_1 + L_2 = l$ として得られる)。よって、電線の外側の磁束鎖交数は (積分の詳細は「詳解電磁気学演習」(後藤憲一著・共立出版) などを参照)、

$$\varphi_e = \int_{r=a}^{\infty}\int_{z=0}^{l} B(r,z)\,dz\,dr = \frac{\mu_0 l I}{2\pi}\left\{\ln\left(\frac{l+\sqrt{a^2+l^2}}{a}\right) - \frac{\sqrt{a^2+l^2}}{l} + \frac{a}{l}\right\}$$

ここで、$a << l$ を仮定すると、$\sqrt{a^2+l^2} = l$、$a/l = 0$ と置けるので、

$$\varphi_e = \frac{\mu_0 l I}{2\pi}\left\{\ln\left(\frac{2l}{a}\right) - 1\right\}$$

となり、電線外の自己インダクタンスが、

$$L_e = \frac{\varphi_e}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left\{\ln\left(\frac{2l}{a}\right) - 1\right\}$$

と求まる。従って、電線内外の自己インダクタンスを合わせると、

$$L = L_i + L_e = \boxed{\frac{l}{2\pi}\left[\frac{\mu}{4} + \mu_0\left\{\ln\left(\frac{2l}{a}\right) - 1\right\}\right] \ [\mathrm{H}]}$$

9.10

環状ソレノイドの半径 r の位置における磁束密度は、

$$B = \frac{\mu_r \mu_0 NI}{2\pi r} \quad (6.24)$$

であるので、半径 r で微小幅 dr の領域の磁束鎖交数は、

$$d\varphi = NBc\,dr = \frac{\mu_r \mu_0 N^2 cI}{2\pi r} dr$$

これを半径 a から b まで積分すると、全体の磁束鎖交数は、

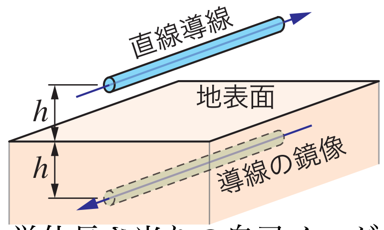
$$\varphi = \int_a^b d\varphi = \frac{\mu_r \mu_0 N^2 cI}{2\pi} \int_a^b \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_r \mu_0 N^2 cI}{2\pi} [\ln r]_a^b = \frac{\mu_r \mu_0 N^2 cI}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

よって、自己インダクタンスは、

$$L = \frac{\varphi}{I} = \boxed{\frac{\mu_r \mu_0 N^2 c}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \ [\mathrm{H}]}$$

9.11

直線状電線と反無限の完全導体で構成されている回路の場合、直線状電線の鏡像が反無限導体内に存在すると看做すことができる (右図)。従って、この問題は、距離が $2h$ 離れた平行往復線路と同じであり、教科書 p157-158 の結果 (式 9.48) で片側分 (半分) として考えることができる。よって、電線外部の単位長さ当りの自己インダクタンスは、



$$L_e = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{2h}{a}$$

また、電線内部の自己インダクタンスは演習問題 9.9 の L_i 結果と同じである。従って、全体の単位長さ当りの自己インダクタンスは、

$$L = L_e + L_i = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{2h}{a} + \frac{\mu}{8\pi} = \boxed{\frac{1}{2\pi}\left(\mu_0 \ln \frac{2h}{a} + \frac{\mu}{4}\right) \ [\mathrm{H/m}]}$$

9.12

6 章の結果から、円形回路に電流 I_1 を流したときに回路中心から z 離れた位置の磁束密度は、

$$B = \frac{\mu_0 a^2 I_1}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (6.10)$$

よって、円形回路が作る磁束がソレノイドと鎖交する磁束鎖交数 φ_{21} は、

$$\varphi_{21} = \int_d^{d+l} BSn\,dz = \frac{\mu_0 a^2 SnI_1}{2} \int_d^{d+l} (z^2 + a^2)^{-3/2} dz$$

ここで、$z = a\tan\theta$ とおくと、$dz = \dfrac{a}{\cos^2\theta} d\theta$、$z^2 + a^2 = \dfrac{a^2}{\cos^2\theta}$ となるので、上式の定積分の部分は、

$$\begin{aligned} \int_d^{d+l} (z^2 + a^2)^{-3/2} dz &= \int_{z=d}^{d+l} \left(\frac{a^2}{\cos^2\theta}\right)^{-3/2} \frac{a}{\cos^2\theta} d\theta = \int_{z=d}^{d+l} \left(\frac{a}{\cos\theta}\right)^{-3} \frac{a}{\cos^2\theta} d\theta \\ &= \int_{z=d}^{d+l} \frac{\cos\theta}{a^2} d\theta = \frac{1}{a^2}\Big[\sin\theta\Big]_{z=d}^{d+l} \end{aligned}$$

$z = a\tan\theta$ の関係は、底辺 a、高さ z の直角三角形の関係に相当するので、斜辺の長さは $\sqrt{a^2 + z^2}$、すなわち、$\sin\theta = z/\sqrt{a^2 + z^2}$ である。よって、

$$\int_d^{d+l} (z^2 + a^2)^{-3/2} dz = \frac{1}{a^2}\left[\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right]_d^{d+l} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{d+l}{\sqrt{a^2 + (d+l)^2}} - \frac{d}{\sqrt{a^2 + d^2}}\right)$$

となり、

$$\varphi_{21} = \frac{\mu_0 a^2 SnI_1}{2} \cdot \frac{1}{a^2}\left(\frac{d+l}{\sqrt{a^2 + (d+l)^2}} - \frac{d}{\sqrt{a^2 + d^2}}\right) = \frac{\mu_0 SnI_1}{2}\left(\frac{d+l}{\sqrt{a^2 + (d+l)^2}} - \frac{d}{\sqrt{a^2 + d^2}}\right)$$

よって、相互インダクタンスは、

$$M = \frac{\varphi_{21}}{I_1} = \boxed{\frac{\mu_0 Sn}{2}\left(\frac{d+l}{\sqrt{a^2 + (d+l)^2}} - \frac{d}{\sqrt{a^2 + d^2}}\right) \ [\mathrm{H}]}$$

9.13

教科書 p160 の同軸線路の問題の解中の式から、単位長さ当りに蓄えられる磁気エネルギーは、

$$W_m = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$

である。ここで、内筒の半径が $a \to a + \Delta a$ に仮想変位するとすると、磁気エネルギーの変化は、

$$\Delta W_m = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\ln \frac{b}{a + \Delta a} - \ln \frac{b}{a} \right) = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{a}{a + \Delta a}$$

内筒に働く力は磁気エネルギーの変化と仮想変位を用いて $F = -\Delta W/\Delta a$ と表せるので、

$$F_i = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi\Delta a} \ln \frac{a}{a + \Delta a} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi\Delta a} \ln \frac{a + \Delta a}{a} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi\Delta a} \ln \left(1 + \frac{\Delta a}{a} \right)$$

ここで、対数関数の Taylor 展開

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

を用い、x が十分小さいとして 2 次以降の項を無視すると、$\ln(1 + x) \simeq x$ となる。これを F の式に適応すると、

$$F_i = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi\Delta a} \cdot \frac{\Delta a}{a} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a}$$

よって、内筒の単位面積当りに働く力は、

$$f_i = \frac{F_i}{2\pi a \cdot 1} = \boxed{\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 a^2}\ [\mathrm{Pa}]}$$

また、外筒を Δb だけ仮想変位させると、

$$\Delta W_m = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left(\ln \frac{b + \Delta b}{a} - \ln \frac{b}{a} \right) = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{b + \Delta b}{b}$$

内筒と同様に、外筒に働く力を求めると、

$$F_o = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi\Delta b} \ln \frac{b + \Delta b}{b} = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi b}$$

よって、外筒の単位面積当りに働く力は、

$$f_o = \frac{F_o}{2\pi b \cdot 1} = \boxed{-\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 b^2}\ [\mathrm{Pa}]}$$

9.14

磁路を通過する磁束 Φ は、起磁力 NI と各部の磁気抵抗 R_1、R_2、R_δ を用いて (第 7 章 p122-124 参照)、

$$\Phi = \frac{NI}{R_1 + R_2 + 2R_\delta} = \frac{NI}{\frac{l_1}{\mu_1 S} + \frac{l_2}{\mu_2 S} + 2\frac{\delta}{\mu_0 S}} = \frac{NIS}{l_1/\mu_1 + l_2/\mu_2 + 2\delta/\mu_0}$$

また、空隙に働く力の大きさの式 (p153 の 9.41 式) と、磁束密度 $B = \Phi/S$ の関係から、

$$F = \frac{B^2 S}{\mu_0} = \boxed{\frac{\left(\frac{NI}{l_1/\mu_1 + l_2/\mu_2 + 2\delta/\mu_0} \right)^2 S}{\mu_0}\ [\mathrm{N}]}$$

電気磁気学2：物理に必要な最低限の数学知識

各種の用語

- **演算と演算子：**特定の計算を行うことを演算といい、計算の仕方を表す記号 (+、−、×、÷ など) を演算子という。
- **度数法と弧度法：**角度の測定法で、前者は 1 周が 360°、後者は 1 周が 2π [rad] と定義したもの。弧度法の角度は、半径 1 の円の円弧の長さに等しい。物理や数学では弧度法が標準である。角度の表現としては、これらの他に勾配 (単位%) も用いられる (道路の傾斜など)。
- **変数：**定まった値を持たない数であり、一般的に記号 x、t、θ などで表現される (代数ともいう)。物理では時間変数は t、空間座標変数は x、y、z、距離変数は r、角度変数は θ など特定の記号を用いることが多い。
- **関数：**ある変数 (例えば y) が他の変数 (例えば x) の演算 (例えば $2x+3$) によって定まる場合、「y は x の関数」といい、$y=f(x)$ と表現される。
- **独立変数と従属変数：**二つの変数の値を互いに自由に定めることができる場合、それらを独立変数という。逆に一方の値を定めると他方が定まる場合には、一方を他方の従属変数という (例えば、$y=2x+3$ など)。
- **媒介変数：**従属な関係にある二つの変数の関係式を直接に表すのではなく、$x=\sin\theta$、$y=\cos\theta$ のように他の変数 (これを媒介変数という) を介して表すことを媒介変数表示という。物理ではしばしば座標位置の各成分を時間を媒介変数として表示する。
- **座標系：**点の位置を表すため、基準点 (原点) と方向 (座標軸) の組を定めたものが座標系 (座標空間) である。座標軸の数は次元の数と同じである (平面なら 2、立体なら 3、時間変化する立体なら 4 など)。空間を表す座標系には直交座標系、極座標系、円筒座標系などがあり、与えられた問題に対して式や計算が容易になるように自由に選択できる。座標空間内の点の位置は、各座標軸に沿った方向の原点からの距離の組 (例えば (x,y,z)) で表現され、座標成分 (或は単に座標) と呼ぶ。

三角関数

$\angle\mathrm{ABC}=\pi/2$ の直角三角形 ABC の底辺の長さ $\overline{\mathrm{AB}}=a$、高さ $\overline{\mathrm{BC}}=b$、斜辺の長さ $\overline{\mathrm{CA}}=c$ とし、$\angle\mathrm{CAB}=\theta$ と定めたとき、6 つの三角関数が以下のように定義できる。

$$
\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{b}{c} \quad \text{正弦 (サイン)}\\
\cos\theta &= \frac{a}{c} \quad \text{余弦 (コサイン)}\\
\tan\theta &= \frac{b}{a} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{正接 (タンジェント)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cosec}\theta &= \frac{c}{b} = \frac{1}{\sin\theta} \quad \text{余割 (コセカント)}\\
\sec\theta &= \frac{c}{a} = \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{正割 (セカント)}\\
\cot\theta &= \frac{a}{b} = \frac{1}{\tan\theta} \quad \text{余接 (コタンジェント)}
\end{aligned}
$$

これらの三角関数には、以下のような性質がある。

$$
\begin{aligned}
\sin^2\theta+\cos^2\theta &= 1\\
\sin(-\theta) &= -\sin\theta\\
\cos(-\theta) &= \cos\theta\\
\tan(-\theta) &= -\tan\theta\\
\sin(\theta+\pi) &= -\sin\theta\\
\cos(\theta+\pi) &= -\cos\theta\\
\tan(\theta+\pi) &= \tan\theta\\
\sin(\theta+\frac{\pi}{2}) &= \cos\theta\\
\cos(\theta+\frac{\pi}{2}) &= -\sin\theta\\
\tan(\theta+\frac{\pi}{2}) &= -\cot\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha\pm\beta) &= \sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta\\
\cos(\alpha\pm\beta) &= \cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\\
\tan(\alpha\pm\beta) &= \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}\\
\sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta\\
\cos 2\theta &= \cos^2\theta-\sin^2\theta = 2\cos^2\theta-1 = 1-2\sin^2\theta\\
\tan 2\theta &= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\\
\sin\frac{\theta}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\\
\cos\frac{\theta}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}\\
\tan\frac{\theta}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}
\end{aligned}
$$

指数関数、対数関数

- **指数関数：**一般に $y = \alpha^x$ のとき y は x の指数関数と呼ぶ。物理や数学では $\alpha = 2.71828\cdots = e$ (ネイピア数、自然対数の底) を用いた関数に限定していることが多い。e^x は $\exp(x)$ と表現することもある。指数関数の値は常に正である。

- **対数関数：**指数関数の逆関数で $\log_\alpha x$ と表現する (α は対数の底という)。α を省略した場合、物理や数学では $\alpha = e$ の関数 (自然対数という) を指すことが多いが、$\alpha = 10$ を用いた常用対数と区別するために、$\ln x$ と書くことが多い。対数関数は $x > 0$ の範囲でのみ定義される。

指数・対数関数には以下のような性質がある。

$$
\begin{aligned}
e^0 &= 1 \\
e^{-\infty} &= 0 \\
e^{\infty} &= \infty \\
e^{-x} &= \frac{1}{e^x} \\
e^{x+y} &= e^x e^y \\
e^{x-y} &= \frac{e^x}{e^y} \\
e^{xy} &= (e^x)^y \\
e^{\ln x} &= x \\
\ln e^x &= x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ln 0 &= -\infty \\
\ln 1 &= 0 \\
\ln \infty &= \infty \\
\ln \frac{1}{x} &= -\ln x \\
\ln xy &= \ln x + \ln y \\
\ln \frac{x}{y} &= \ln x - \ln y \\
\log_a x &= \frac{\log_b a}{\log_b x} \quad \text{(底の変換)}
\end{aligned}
$$

微分

- 関数 $f(x)$ の x に対する微分 $\dfrac{df(x)}{dx}$ は、x を微少量 dx だけ増やしたときの $f(x)$ の増加量であり、関数 $f(x)$ の x 方向の傾きを与える。

- 関数の微分は、関数が滑らかに連続している場合にのみ定義できる。例えば、V 字型をしている場合には、V 字の頂点では微分を定義できない。

- 関数が $x = x_1$ で極大値、あるいは極小値をとるとき、$\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_1} = 0$ である。

- 多変量からなる関数 (例えば、x、y の関数 $f(x, y)$) で、一つの変数のみに着目 (他の変数は定数と看做す) して微分したもの $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ を偏微分といい、着目した方向への傾きを表す。

主要な関数の微分公式を下に示す。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx} a &= 0 \\
\frac{d}{dx} x^a &= a\, x^{a-1} \\
\frac{d}{dx} e^x &= e^x \\
\frac{d}{dx} \ln x &= \frac{1}{x} \\
\frac{d}{dx} \sin x &= \cos x \\
\frac{d}{dx} \cos x &= -\sin x \\
\frac{d}{dx} \tan x &= \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\{a\, f(x)\} &= a \cdot f'(x) \\
\frac{d}{dx}\{f(x) \pm g(x)\} &= f'(x) \pm g'(x) \\
\frac{d}{dx}\{f(x)\, g(x)\} &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\
\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\{g(x)\}^2} \\
\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{f(x)}\right\} &= -\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2} \\
\frac{d}{dx} f\left(g(x)\right) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\
\frac{d}{dx} f\left(ax+b\right) &= a \cdot f'(ax+b)
\end{aligned}
$$

積分

- 関数 $f(x)$ の x に対する定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は、$x=a$ から $x=b$ の範囲で $f(x)$ の値を足し合わせたものであり、a から b の間の面積を求める計算に相当する。
- 範囲を指定しない不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ は、任意の定数 (一般的には C で表現される) を含む関数である。

主要な関数の積分公式を下に示す。

$$
\begin{aligned}
\int 0\,dx &= C \\
\int x^a dx &= \frac{1}{a+1}x^{a+1}+C \\
\int x^{-1}dx &= \ln|x|+C \\
\int e^x\,dx &= e^x+C \\
\int \sin x\,dx &= -\cos x+C \\
\int \cos x\,dx &= \sin x+C \\
\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx &= \tan x+C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int a\,f(x)\,dx &= a\,F(x)+C \\
\int \{f(x)\pm g(x)\}\,dx &= F(x)\pm G(x)+C \\
\int f(x)\cdot g'(x)\,dx &= f(x)\cdot g(x)-\int f'(x)\cdot g(x)\,dx \\
\int e^x\cdot f(x)\,dx &= e^x\cdot f(x)-\int e^x\cdot f'(x)\,dx \\
\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx &= F(g(x))+C \\
\int f(ax+b)\,dx &= \frac{1}{a}F(ax+b)+C
\end{aligned}
$$

ベクトル

- ベクトルは方向と大きさ (長さ) を持った値であり、$\vec{a}$ 或は $\boldsymbol{a}$(太字) で表す (大学以降の数学では太字を用いることの方が多い)。大きさのみを持つ値はスカラーと呼ぶ。
- ベクトルには次元があり、平面内のものは 2 次元、空間内のものは 3 次元である (1 次元はスカラーと同じ)。数学的には 4 次元以上にも拡張可能であり、任意の n 次元 (n は正の整数) ベクトルを仮定することができる。
- ベクトルは、その成分 (スカラー) を用いて、$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ と書くことができる (例は 3 次元ベクトル)。
- ベクトルは、次数分の単位ベクトル (長さ 1 のベクトル) を用いて、$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$ と書くことができる。単位ベクトルは、直交座標系では $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ の記号を用いることが多く、極座標系では $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$ といった記号を用いることが多い。
- ベクトルの長さは、各成分を用いて $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ と書ける。ベクトルの長さはスカラーである。
- ベクトルの和は、各成分の和である。$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$
- ベクトルの差は、各成分の差である。$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$
- スカラーとベクトルの積は、各成分にスカラーをかけたものである。$\beta\boldsymbol{a}=(\beta a_1,\beta a_2,\beta a_3)$
- ベクトル同士の積は 2 種類あり、一つは内積 (演算子「$\cdot$」)、他方は外積 (演算子「$\times$」) という。
- ベクトルの内積は、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ で定義されるスカラーである (内積のことをスカラー積ともいう)。
- ベクトルの内積は、それぞれの長さを用いて、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ と書くこともでき (θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角)、これは互いに平行な成分のかけ算を意味する。従って、互いに直交するベクトルの内積は 0 となる。
- ベクトルの外積は、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$ で定義されるベクトルである (外積のことをベクトル積ともいう)。
- ベクトルの外積は、それぞれの長さを用いて、$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\theta$ と書くこともでき (θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角)、これは互いに垂直な成分のかけ算を意味する。これは、幾何学的には、二つのベクトルによって作られる平行四辺形の面積を求めることに等しい。よって、互いに平行なベクトルの外積は 0 となる。

- ベクトルの外積と、それぞれのベクトルとの内積 ($(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a}$ や $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b}$) は常に 0 になる (各成分を用いて計算してみて欲しい)。すなわち、ベクトルの外積の結果は、それぞれのベクトルと直交している。
- 外積ベクトルの方向は右ネジの法則に従っており、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ 方向に右ネジが回転したときに進む方向、$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{b}$ から $\boldsymbol{a}$ 方向に右ネジが回転したときに進む方向となる。従って、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$ の関係があり、かけ算の順序によって方向が異なる (長さは同じ)。